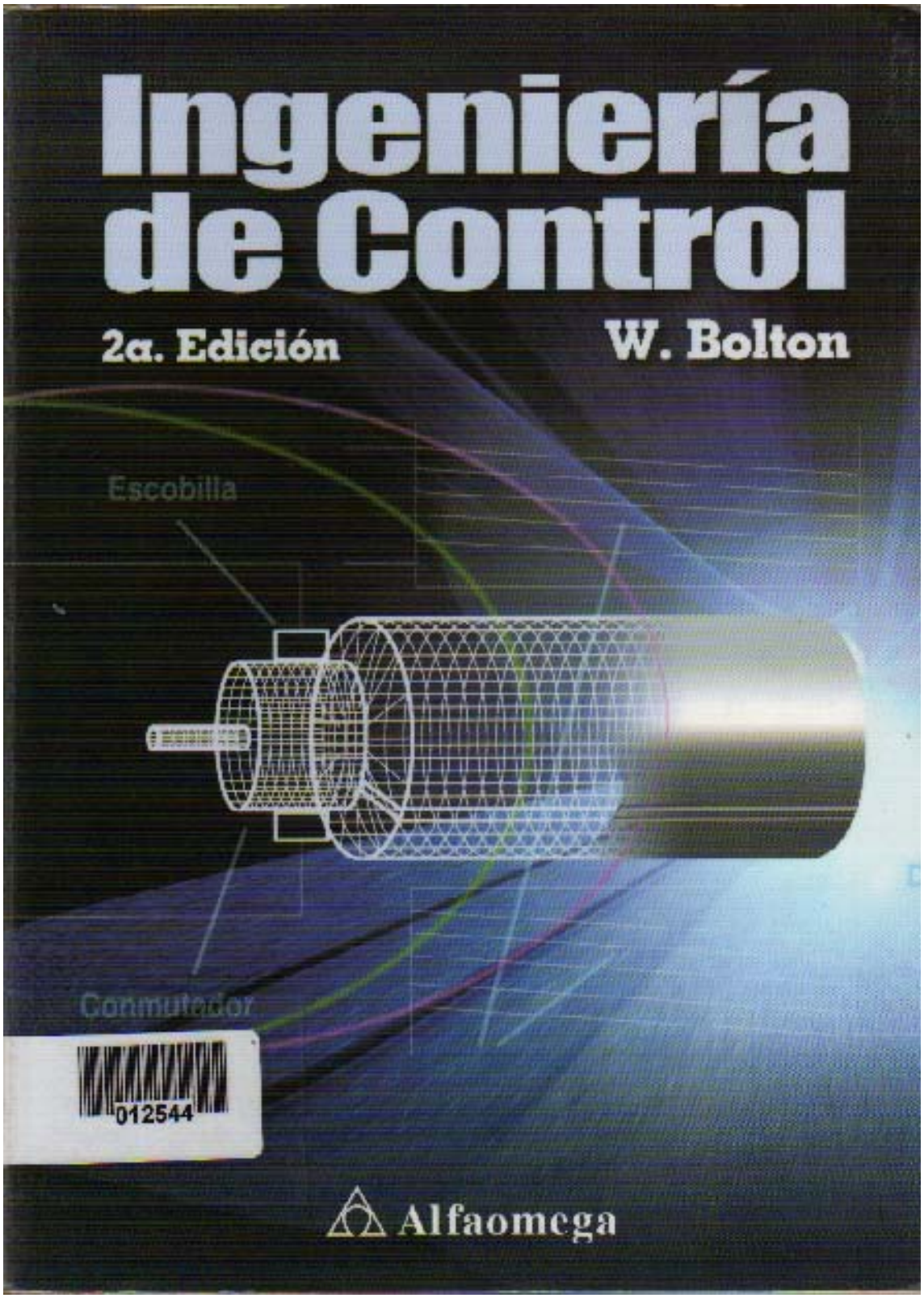
Ingeniería de Control

2a. Edición

W. Bolton



012544

Alfaomega

TJ
213
- B 694 i
ELE
Ej.13

Ingeniería de Control

INSTITUTO TECNOLÓGICO
SUPERIOR DE LERDO
BIBLIOTECA

Ingeniería de Control

W. Bolton

2a. Edición

INSTITUTO TECNOLÓGICO
SUPERIOR DE LERDO
BIBLIOTECA

Alfaomega

Traducción al español:
Ing. Francisco José Rodríguez Ramírez
Ingeniero Mecánico Electricista, Facultad de Ingeniería. UNAM
Coordinador del Departamento de Dinámica de Sistemas Físicos
Miembro de la Asociación Mexicana de Control Automático.

Al cuidado de la edición:
Francisco Javier Rodríguez Cruz
Ma. del Carmen Solano del Moral

Producción
Guillermo González Dorantes

Diagramación electrónica:
Ediámac

Primera edición: México, agosto 2001
Quinta reimpresión: México, diciembre 2006

Versión en español de la obra titulada en inglés:
Control Engineering, 2a. ed. por William Bolton, publicada
originalmente por © Addison Wesley Longman Limited

© 2001 ALFAOMEGA GRUPO EDITOR, S.A. de C.V.
Pitágoras 1139, Col. Del Valle, 03100, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro No. 2317

Internet: **http://www.alfaomega.com.mx**
E-mail: **ventas1@alfaomega.com.mx**

Derechos reservados.
Esta obra es propiedad intelectual de su autor y los derechos de publicación en lengua española han sido legalmente transferidos al editor. Prohibida su reproducción parcial o total por cualquier medio sin permiso por escrito del propietario de los derechos del copyright.

ISBN 970-15-0636-7

ISBN 0-582-32773-3, versión original de Addison Wesley Longman Limited.

Impreso en México - Printed in Mexico

Contenido

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE LERDO BIBLIOTECA

		Prefacio	xi
1	**Sistemas de control**	Introducción	1
		Sistemas	1
		Modelos	3
		Sistemas en lazo abierto y cerrado	4
		Elementos básicos de un sistema en lazo abierto	6
		Elementos básicos de un sistema en lazo cerrado	8
		Ejemplos de sistemas de control en lazo cerrado	11
		Estrategias de control	15
		Control digital	17
		Modelos matemáticos para sistemas	18
		Modelos matemáticos para sistemas en lazo abierto	20
		Modelos matemáticos para sistemas en lazo cerrado	21
		Modelos matemáticos para sistemas en lazo cerrado con elementos múltiples	23
		Error en estado estable	24
		Efectos de las perturbaciones	27
		Sensibilidad a cambios en los componentes	30
		Estabilidad de los sistemas de control	31
		Lazo cerrado contra lazo abierto	33
		Problemas	33
2	**Modelos de sistemas**	Introducción	36
		Bloques funcionales de sistemas mecánicos	36
		Formación de un modelo para un sistema mecánico	40
		Bloques funcionales de sistemas eléctricos	43
		Formación de un modelo para un sistema eléctrico	45
		Analogías eléctricas y mecánicas	51
		Bloques funcionales de sistemas fluídicos	54
		Formación de un modelo para un sistema fluídico	59
		Bloques funcionales de sistemas térmicos	63

		Formación de un modelo para un sistema térmico	65
		Elementos electromecánicos	66
		Linealidad	70
		Elementos hidromecánicos	72
		Problemas	75
3	**Respuesta del sistema**	Introducción	78
		Ejemplos de sistemas de primer orden	79
		La ecuación diferencial de primer orden	80
		Solución de una ecuación diferencial de primer orden	81
		La constante de tiempo	83
		El operador D	85
		El operador D y la ecuación diferencial de primer orden	86
		Ejemplos de sistemas de segundo orden	89
		La ecuación diferencial de segundo orden	90
		Solución de una ecuación diferencial de segundo orden	91
		Medidas de desempeño para sistemas de segundo orden	99
		El operador D y los sistemas de segundo orden	103
		Problemas	104
4	**Transformadas de Laplace**	Introducción	106
		La transformación de Laplace	107
		La transformada de Laplace para una función escalón	108
		Empleando transformadas de Laplace	109
		Empleo de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales	115
		Fracciones parciales	118
		Teoremas del valor inicial y del valor final	121
		Problemas	122
5	**Modelos de sistemas dinámicos**	Introducción	125
		Funciones de transferencia de elementos dinámicos	125
		Elementos de primero y segundo orden	128
		Respuesta escalón de un sistema de primer orden	130
		Respuesta rampa de un sistema de primer orden	131
		Respuesta impulso de un sistema de primer orden	133
		Respuesta escalón de un sistema de segundo orden	134
		Respuesta rampa de un sistema de segundo orden	138
		Respuesta impulso de un sistema de segundo orden	140
		Problemas	143
6	**Modelos mediante diagramas de bloques**	Introducción	145
		El diagrama de bloques	145
		Bloques en serie	146

		Bloques con lazos de realimentación	147
		Bloques en serie y con un lazo de realimentación	148
		Bloques en paralelo	149
		Simplificación de diagramas de bloques	152
		Entradas múltiples	155
		Ejemplos de sistemas	158
		Problemas	164
7	El error en estado estable	Introducción	167
		Error en estado estable	167
		Clasificación de sistemas	169
		Error en estado estable para una entrada escalón	170
		Error en estado estable para una entrada rampa	172
		Error en estado estable para una entrada parabólica	174
		Errores en estado estable para diferentes entradas	176
		Error en estado estable debido a perturbaciones	178
		Problemas	180
8	Polos, ceros y estabilidad	Introducción	182
		Defininiendo la estabilidad	182
		Polos y ceros	183
		Patrón de polos y ceros	186
		Estabilidad y polos	187
		El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz	190
		Estabilidad relativa	196
		Problemas	198
9	Análisis del lugar geométrico de las raíces	Introducción	200
		Lugares geométricos de las raíces de sistemas de primer orden	200
		Lugares geométricos de las raíces de sistemas de segundo orden	202
		Lugares geométricos de las raíces de sistemas en lazo cerrado	204
		Representación polar de números complejos	206
		Construcción de lugares geométricos de las raíces	207
		Interpretación de los diagramas del lugar geométrico de las raíces	215
		Problemas	223
10	Controladores	Introducción	225
		Control proporcional	225
		Control integral	227
		Control proporcional integral	229
		Control derivativo	232
		Control proporcional derivativo	233
		Control PID	234

	Ajuste de las ganancias del controlador	236
	Realimentación de velocidad	239
	Compensación	242
	Implantación de las leyes de control	244
	Problemas	249
11 Respuesta en frecuencia	Introducción	252
	Respuesta en frecuencia	252
	Función de transferencia	252
	Respuesta en frecuencia de un sistema de primer orden	256
	Respuesta en frecuencia para un sistema de segundo orden	257
	Respuesta en frecuencia a partir del patrón de polos y ceros	258
	Respuesta en frecuencia para elementos en serie	260
	Trazas de Bode	261
	Especificaciones de desempeño	272
	Uso de datos experimentales de la respuesta en frecuencia	273
	Diseño mediante compensación	275
	Diagramas de Nyquist	276
	Criterio de estabilidad de Nyquist	281
	Margen de ganancia y margen de fase	282
	Problemas	285
12 Equipo básico de un sistema de control	Introducción	288
	Elementos de medición	288
	Elementos eléctricos de corrección	297
	Elementos de corrección electroneumáticos o hidráulicos	300
	Ejemplos de sistemas de control	303
	Problemas	307
13 Control de procesos discretos	Introducción	309
	Procesos discretos	309
	Secuenciado mediante cilindros neumáticos	313
	Microprocesadores como controladores	318
	Controladores lógicos programables	318
	Programación de PLC	321
	Problemas	327
14 Control digital directo	Introducción	329
	Computadoras en control	329
	Ejemplos de control digital directo	332
	Problemas	334
15 La transformada z	Introducción	335
	Sistemas de datos muestreados	335

	Procesamiento de señales en tiempo discreto	338
	Retén de orden cero	341
	La transformada z	342
	Uso de la transformada z	345
	Transformada z inversa	349
	Función de transferencia pulso	352
	Sistemas de datos muestreados	354
	Conversión de las leyes de control analógicas	358
	Implementación de un algoritmo	359
	Periodo de muestreo	360
	Estabilidad	361
	Pruebas para la estabilidad	365
	Respuesta en frecuencia	368
	Problemas	370
Apéndice: MATLAB	Introducción	374
	Inicio y terminación de sesión	374
	Ingreso de comandos	374
	Ayuda	375
	Matrices	375
	Operaciones aritméticas	376
	Funciones matemáticas	377
	Operaciones con matrices	377
	Archivo de función	377
	Graficación	378
	Ejemplos de control	379
	Diagramas de bloques	381
	SIMULINK	382
	Respuestas a los problemas	384
	Índice	395

Prefacio

INSTITUTO TECNOLÓGICO
SUPERIOR DE LERDO
BIBLIOTECA

Panorama

El libro aspira a proporcionar la base conceptual de los principios de la ingeniería de control, suponiendo una destreza básica en álgebra y cálculo. Se ha visto que, en particular, es adecuado para estudiantes de escuelas tecnológicas y de ingeniería como una introducción al análisis de sistemas de control.

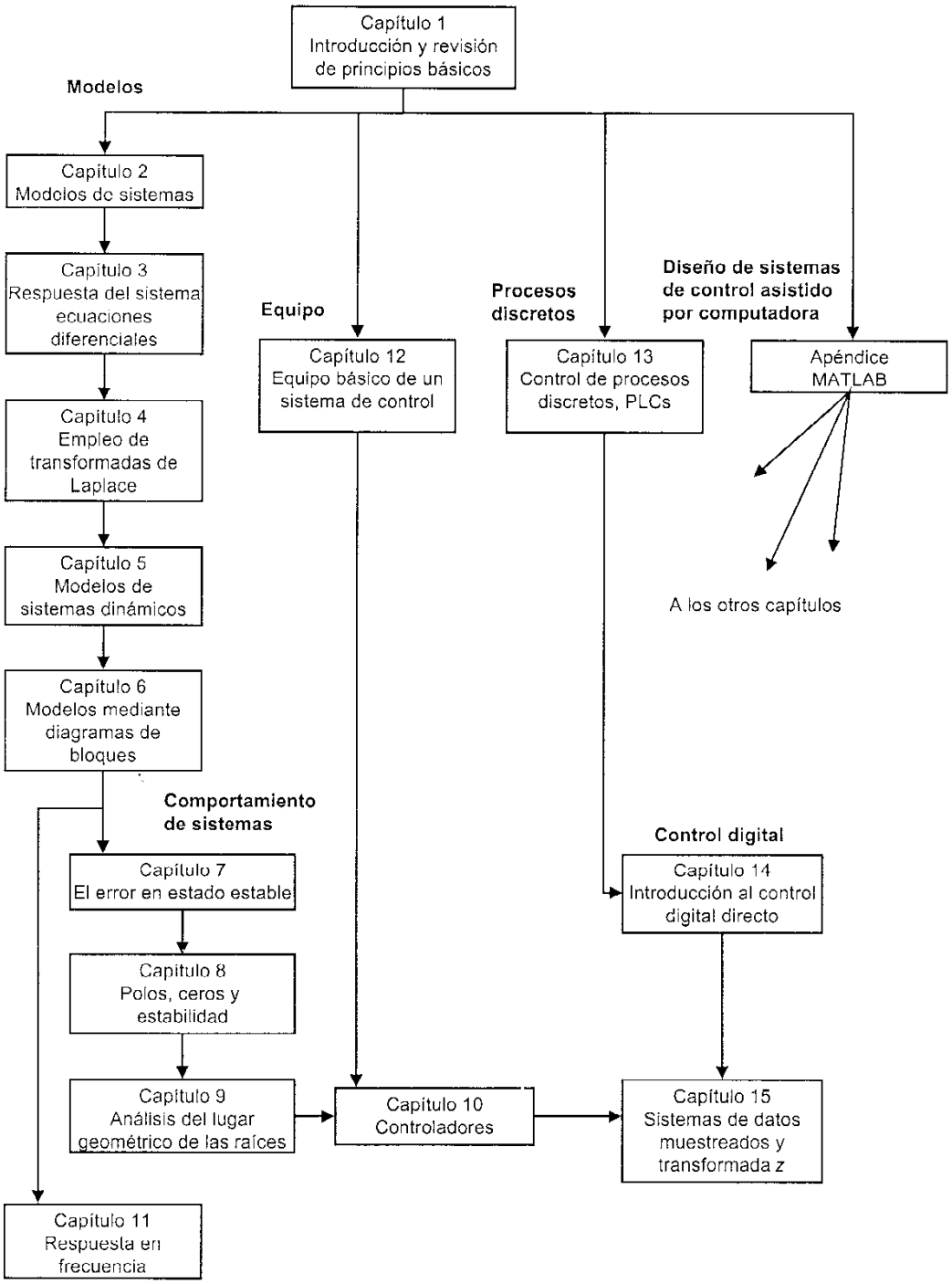
El texto tiene por objetivo desarrollar los principios básicos de la ingeniería de control y la capacidad del lector para solucionar problemas y hacer frente a trabajos de ingeniería de control. Se ha procurado una aproximación a las matemáticas de la ingeniería de control de manera "comprensiva" para el lector que pudiera no considerar las matemáticas como su tema favorito. Sin embargo, no se ha sacrificado el rigorismo matemático. Cada capítulo incluye ejemplos resueltos y problemas, proporcionando la solución de todos.

Cambios respecto a la primera edición

Se han incluido capítulos sobre equipo para sistemas de control, control de procesos discretos y control digital; el capítulo de la transformada z se reescribió. El objetivo de estos cambios es proporcionar un contenido más práctico y fortalecer la parte del texto dedicada a procesos discretos y control digital. Ahora se incluye un detallado apéndice sobre el uso de MATLAB.

Estructura del libro

Existen varias rutas que se pueden seguir a través del libro. El siguiente mapa indica la estructura global del texto.


Capítulo 1
Introducción y revisión de principios básicos
Modelos
Capítulo 2
Modelos de sistemas
Capítulo 3
Respuesta del sistema ecuaciones diferenciales
Capítulo 4
Empleo de transformadas de Laplace
Capítulo 5
Modelos de sistemas dinámicos
Capítulo 6
Modelos mediante diagramas de bloques
Comportamiento de sistemas
Capítulo 7
El error en estado estable
Capítulo 8
Polos, ceros y estabilidad
Capítulo 9
Análisis del lugar geométrico de las raíces
Capítulo 11
Respuesta en frecuencia
Equipo
Capítulo 12
Equipo básico de un sistema de control
Capítulo 10
Controladores
Procesos discretos
Capítulo 13
Control de procesos discretos, PLCs
Diseño de sistemas de control asistido por computadora
Apéndice
MATLAB
A los otros capítulos
Control digital
Capítulo 14
Introducción al control digital directo
Capítulo 15
Sistemas de datos muestreados y transformada z

Objetivos

El libro tiene el propósito de ayudar al lector a:

1 Comprender los conceptos básicos de los sistemas de control en lazo abierto y en lazo cerrado (capítulo 1).
2 Desarrollar modelos para sistemas mecánicos, eléctricos, fluídicos y térmicos (capítulo 2).
3 Usar modelos para aproximarse al análisis de sistemas de primero y segundo orden (capítulo 2).
4 Determinar las respuestas de sistemas a diferentes entradas mediante la obtención y solución de ecuaciones diferenciales de primero y segundo orden (capítulo 3).
5 Determinar la respuesta de sistemas a entradas escalón, impulso y rampa usando la transformada de Laplace (capítulos 4 y 5).
6 Construir modelos de sistemas con diagramas de bloques (capítulo 6).
7 Determinar los errores en estado estable para sistemas (capítulo 7).
8 Usar métodos de polos y ceros para analizar el comportamiento de sistemas y la estabilidad (capítulos 8 y 9).
9 Comprender las funciones que se pueden usar para controladores (capítulo 10).
10 Determinar la respuesta en frecuencia de sistemas, incluyendo los diagramas de Bode y de Nyquist (capítulo 11).
11 Identificar los elementos del equipo que por lo común se usan en sistemas de control para medición y corrección (capítulo 12).
12 Describir el control de procesos discretos mediante listas de instrucciones, diagrama de tiempos del proceso, diagramas de escalera, diagramas de flujo y diagrama de funciones secuenciales (capítulo 13).
13 Desarrollar sistemas de control secuencial mediante cilindros neumáticos (capítulo 13).
14 Describir los elementos de controladores lógicos programables y desarrollar programas para ellos (capítulo 13).
15 Describir el control digital directo en términos de diagramas de bloques y explicar las funciones de control en cascada, control inferencial, control prealimentado y control adaptable (capítulo 14).
16 Describir el procesamiento de señales en tiempo discreto mediante ecuaciones en diferencias, usar la transformada z para determinar la respuesta de sistemas de datos muestreados o digitales a diferentes entradas, elaborar algoritmos digitales para leyes de control analógicas y determinar la estabilidad (capítulo 15).

W. Bolton

1 Sistemas de control

INSTITUTO TECNOLÓGICO
SUPERIOR DE LERDO
BIBLIOTECA

Introducción

¿Qué es un "sistema", y en particular un "sistema de control"? Se puede pensar en un sistema como una caja negra que tiene una entrada y una salida. Se considera una caja negra debido a que en realidad no es importante qué tiene dentro, sino la relación entre la salida y la entrada. Este sistema es de control si la salida se controla de modo que pueda adoptar un valor o cambio en particular de alguna manera definida. Así, para controlar la temperatura en un recinto a un valor específico, se diseña un sistema de control de calefacción central, mientras que una máquina herramienta se puede controlar para seguir una trayectoria dada. En este libro se estudian los sistemas de control, y este primer capítulo se puede considerar como un panorama superficial de las formas básicas que pueden tener los sistemas de control, esto es, como una antesala para los modelos más realistas que se presentan con más detalle en los otros capítulos.

Sistemas

El término *sistema* se emplea para describir un conjunto de componentes que interactúan, alrededor de los cuales se dibuja una frontera imaginaria de modo que sólo es de interés la interacción entre la entrada o entradas y su salida o salidas, sin necesidad de estudiar en detalle las interacciones entre los componentes que lo forman. Así el aspecto importante en un sistema es la relación entre las entradas y las salidas. Un sistema puede ser una estación de generación de energía completa o quizá sólo un motor eléctrico. No importa qué tan complejo sea un conjunto de componentes y sus interacciones dentro del sistema; se puede considerar que todos están dentro de una caja negra y sólo tener en cuenta las entradas y salidas a dicha caja. La figura 1.1 muestra cómo es posible representar un sistema mediante una caja con las entradas y las salidas al sistema indicadas por líneas con flechas, en las que la dirección de la flecha hace referencia ya sea a una entrada o a una salida. La figura 1.1*a* ilustra el sistema de la estación de generación de energía con su entrada de combustible y su salida de electricidad, la figura 1.1*b* ilustra un motor eléctrico con su entrada de potencia eléctrica y su salida movimiento mecánico.

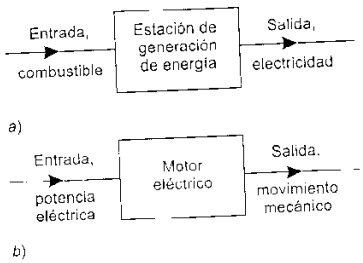


Figura 1.1 Sistemas: *a*) una estación de generación de energía, *b*) un motor eléctrico

La ventaja de estudiar los sistemas de esta manera es que aunque existe una amplia variedad de sistemas posibles, la relación entre la salida y la entrada de muchos sistemas tiende a ser similar. Así, por ejemplo, la respuesta de un sistema eléctrico formado por un capacitor en serie con un resistor y la aplicación súbita de un voltaje tiene el mismo tipo de relación que la respuesta de un contenedor de líquido al cual se le aplica súbitamente una entrada de calor (figura 1.2). De este modo, al estudiar un modelo de sistema con este tipo de relación entre la entrada y la salida es posible determinar cómo responderán muchas formas diferentes de sistemas con la misma relación salida-entrada.

En algunas situaciones es conveniente particionar el sistema en subsistemas enlazados en serie. Así, por ejemplo, se puede tener un sistema de medición de temperatura que consiste en un termómetro resistivo conectado a un puente de Wheatstone y la salida presentada

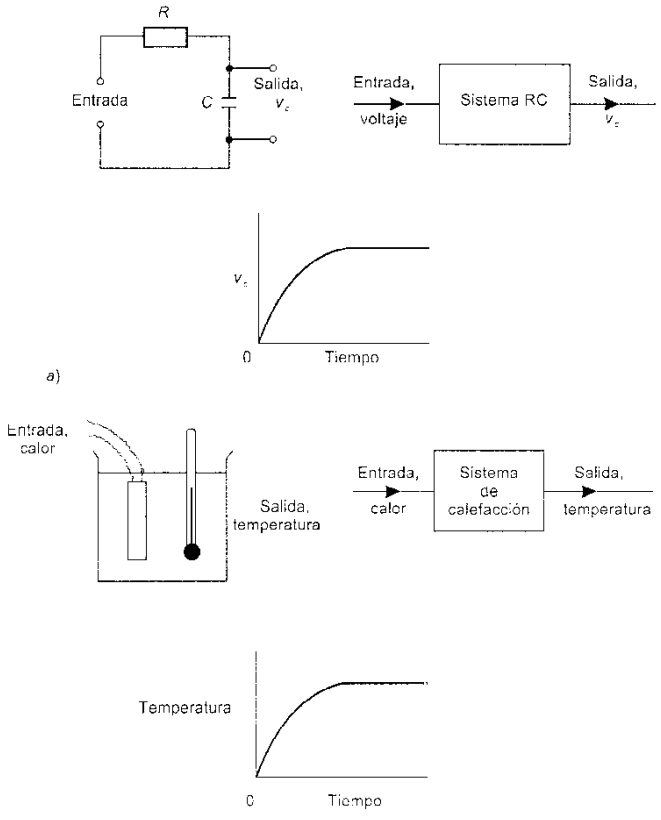


Figura 1.2 Sistemas similares: *a*) sistema RC, *b*) sistema de calefacción

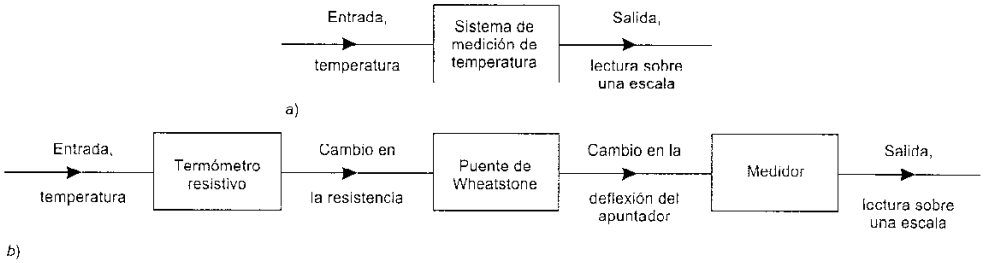


Figura 1.3 *a*) Sistema de medición de temperatura y *b*) sus subsistemas

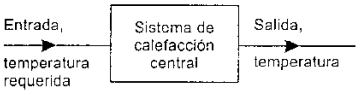


Figura 1.4 Sistema de calefacción central

en un medidor. El sistema completo se puede representar (figura 1.3*a*), como una entrada de temperatura y una salida de una lectura en una escala, o se puede representar (figura 1.3*b*) como formado por un subsistema de termómetro resistivo, conectado a un subsistema puente y conectado a un subsistema de medición.

Un *sistema de control* es aquél en el que la salida del sistema se controla para tener un valor específico o cambiarlo, según lo determina la entrada al sistema. De este modo, un sistema de control de temperatura, por ejemplo, un sistema de calefacción central en una casa (figura 1.4), puede tener en su entrada un termostato o panel de control en el que se fija la temperatura requerida y su salida es la temperatura real producida. Esta temperatura se ajusta mediante el sistema de control, de modo que se obtenga el valor fijado por la entrada al sistema.

Modelos

Un modelo de un barco es una versión a escala de un barco de tamaño real; asimismo, el modelo de un aeroplano es una versión a escala de un aeroplano de tamaño real. Los modelos conservan el mismo tipo de relaciones entre las longitudes de las diferentes partes que los objetos o sistemas de tamaño real. Un mapa es un modelo de un país, las distancias y ubicaciones de las ciudades en el mapa tienen justo las mismas proporciones que el país real. Un *modelo* es sólo un medio para transferir alguna relación de su versión real a otra versión. Para llevar a cabo la transferencia sólo se consideran las relaciones de interés. Así, el mapa se usa nada más para transferir relaciones que involucran distancias y, por lo tanto, ubicaciones; no se transfieren los olores o ruidos del país.

Al dibujar una caja con líneas y flechas para las entradas y salidas se dibuja un modelo para el sistema. Las relaciones que se transfieren del sistema real al dibujo son las relaciones entrada-salida. De ningún modo se sugiere que el dibujo formado por una caja con líneas con flechas se vea como el sistema en la realidad.

Se puede emplear para realizar modelos de casas, autos, grúas, etcétera, el juego de bloques funcionales de construcción de un niño. Es posible construir algunos modelos a partir de un juego (kit) básico. De igual manera se puede emplear un kit básico para construir modelos de sistemas. Los bloques funcionales son subsistemas o elementos de sistemas con características entrada-salida particula-

res. Así, por ejemplo, es posible representar muchos sistemas electrónicos que tienen un amplificador como subsistema, el cual es un dispositivo que toma a la entrada una señal y produce a la salida una versión más grande de la misma señal. Asimismo, con los sistemas de control existe un buen número de bloques funcionales básicos usados para formar sistemas, cada bloque cumple con una función particular. Este capítulo es sólo un panorama de las relaciones básicas entrada-salida de los sistemas de control y el papel de cada uno de los bloques funcionales.

Sistemas de control en lazo abierto y cerrado

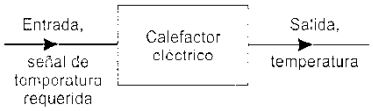


Figura 1.5 Ejemplo de un sistema de control en lazo abierto

Existen dos formas básicas de sistemas de control, una es la denominada *en lazo abierto* y la otra *en lazo cerrado*. Con un sistema en lazo abierto la entrada se elige con base en la experiencia que se tiene con dichos sistemas para producir el valor de salida requerido. Esta salida, sin embargo, no se ve modificada por el cambio en las condiciones de operación externas. Así, por ejemplo, un calefactor eléctrico (figura 1.5) puede tener un selector que permite elegir una disipación en el elemento calefactor de 1 kW o 2 kW. De este modo, la entrada al sistema está determinada por la posición del selector ya sea en 1 kW o 2 kW. La temperatura producida en la habitación acondicionada por el calefactor está determinada únicamente por el hecho de que se haya elegido la disipación de 1 kW en el selector y no 2 kW. Si se presentan cambios en las condiciones de operación, quizá alguien que abre una ventana, la temperatura cambiará debido a que no hay modo de que el calor de salida se ajuste para compensar dicha condición. Éste es un ejemplo de un sistema de control en lazo abierto en el que no existe información que se alimente de regreso (realimentación) al elemento calefactor para ajustarlo y mantener una temperatura constante. Los sistemas de control que operan mediante mecanismos de temporización preestablecidos son sistemas en lazo abierto.

Con un sistema de control en lazo cerrado se tiene una señal de realimentación hacia la entrada desde la salida, la cual se utiliza para modificar la entrada de modo que la salida se mantenga constante a pesar de los cambios en las condiciones de operación (véase la figura 1.6). El sistema de calefacción con el calefactor eléctrico se puede transformar en un sistema en lazo cerrado si alguien con un termómetro monitorea la temperatura en la habitación y enciende o apaga los elementos calefactores de 1 kW o 2 kW para mantener la temperatura de la habitación constante. En esta situación existe la realimentación de una señal a la entrada referente a la temperatura, con lo que la entrada al sistema se ajusta según si su salida es la temperatura requerida. Así, la entrada al calefactor depende de la desviación de la temperatura real con la temperatura requerida.

Para ilustrar las diferencias adicionales entre los sistemas en lazo abierto y en lazo cerrado, considere un motor. Con un sistema en lazo abierto, la velocidad angular en el eje del motor se podría determinar sólo por la posición inicial de la perilla de selección de velocidad, que afecta al voltaje aplicado al motor. Aquí no se compensan

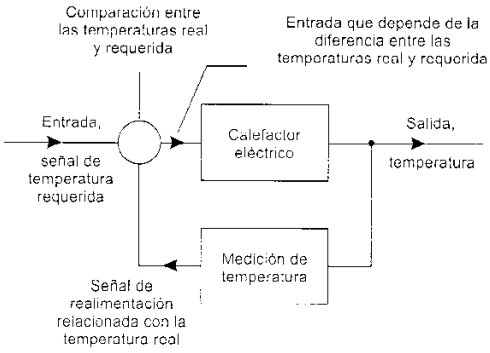

Comparación entre las temperaturas real y requerida
Entrada que depende de la diferencia entre las temperaturas real y requerida
Entrada, señal de temperatura requerida
Calefactor eléctrico
Salida, temperatura
Medición de temperatura
Señal de realimentación relacionada con la temperatura real

Figura 1.6 Ejemplo de un sistema de control en lazo cerrado

los cambios en el voltaje de alimentación, ni en las características del motor debidas a variaciones en la temperatura o los cambios de velocidad en el eje debidos a variación de carga mecánica, ya que no existe lazo de realimentación. Por otro lado, en un sistema en lazo cerrado la posición inicial de la perilla de control tiene una velocidad específica del eje y ésta se mantiene mediante realimentación, a pesar de los cambios en el voltaje de alimentación, las características de motor o de la carga. En un sistema de control en lazo abierto la salida del sistema no tiene efecto sobre la señal de entrada. En un sistema de control en lazo cerrado la salida sí tiene un efecto sobre la señal de entrada, y la modifica para mantener una señal de salida en el valor requerido.

Los sistemas en lazo abierto tienen la ventaja de ser bastante sencillos y en consecuencia de bajo costo, y con buena confiabilidad. Sin embargo, con frecuencia son inexactos, porque no hay corrección de errores. Los sistemas en lazo cerrado tienen la ventaja de ser capaces de igualar los valores reales a los requeridos. No obstante, si existen retrasos en el sistema pueden surgir problemas. Dichos retrasos propician que la acción correctiva requerida llegue demasiado tarde, y como consecuencia, se obtienen oscilaciones en la entrada e inestabilidad (como se verá más adelante). Los sistemas en lazo cerrado son más complicados que aquellos en lazo abierto y más costosos con una gran posibilidad de descompostura debidas a la gran cantidad de componentes. Más adelante en el capítulo, se estudian las ventajas de los sistemas en lazo cerrado respecto a la minimización de los efectos de cambios en las relaciones entrada-salida de los elementos del sistema como resultado de los cambios en el medio y los efectos de las perturbaciones sobre el sistema.

Ejemplo 1

Identifique las entradas y salidas globales y sugiera el tipo de sistema de control que se puede utilizar con *a*) un tostador de pan auto-

mático, *b*) una lavadora de ropa automática, *c*) un sistema de calefacción central doméstico.

Respuesta

a) Con el tostador la entrada es el pan y las instrucciones del grado de tostado requerido, la salida es el nivel de tostado del pan. El grado de tostado requerido se determina mediante el ajuste de la escala del tostador y no se altera por la condición del pan. Entonces, el tostador reaccionará de la misma manera ante una pieza de pan fresco (sin tostar) o si la pieza de pan que se introduce ya está tostada, sin embargo, la salida será diferente: una pieza de pan fresco bien tostado o una como carbón. El tostador no reacciona al cambio en la condición del pan. El sistema es en lazo abierto.

b) La entrada es ropa sucia y la posición de la perilla de control, así como la posición de los interruptores para el tipo de material y forma de lavado requerido, la salida es ropa limpia. La lavadora de ropa automática es un sistema en lazo abierto puesto que llevará acabo el mismo ciclo de procedimientos de lavado a pesar de que se introduzca ropa sucia o limpia.

c) La entrada es la temperatura requerida y la salida es la temperatura real. El sistema de calefacción central doméstico es un sistema en lazo cerrado puesto que se utiliza un termostato para asegurar que la entrada se ajuste a los cambios en las condiciones de operación y así mantenga una temperatura constante.

Elementos básicos de un sistema en lazo abierto

Se puede considerar que un sistema en lazo abierto consiste en algunos subsistemas básicos arreglados como se muestra en la figura 1.7. Estos elementos pueden ser distintos, equipos separados, pero todas las funciones que cumple cada subsistema se deben preservar. La entrada global al sistema es una señal, que, basada en experiencias anteriores, es probable que conduzca a la salida requerida. Los subsistemas son:

1 *Elemento de control.* Este elemento determina qué acción se va a tomar dada una entrada al sistema de control.
2 *Elemento de corrección.* Este elemento responde a la entrada que viene del elemento de control e inicia la acción para producir el cambio en la variable controlada al valor requerido.
3 *Proceso.* El proceso o planta es el sistema en el que se va a controlar la variable.

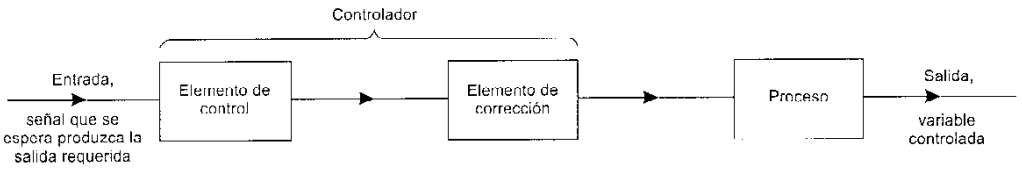


Figura 1.7 Subsistemas en un sistema de control en lazo abierto

mático, *b*) una lavadora de ropa automática, *c*) un sistema de calefacción central doméstico.

Respuesta

a) Con el tostador la entrada es el pan y las instrucciones del grado de tostado requerido, la salida es el nivel de tostado del pan. El grado de tostado requerido se determina mediante el ajuste de la escala del tostador y no se altera por la condición del pan. Entonces, el tostador reaccionará de la misma manera ante una pieza de pan fresco (sin tostar) o si la pieza de pan que se introduce ya está tostada, sin embargo, la salida será diferente: una pieza de pan fresco bien tostado o una como carbón. El tostador no reacciona al cambio en la condición del pan. El sistema es en lazo abierto.

b) La entrada es ropa sucia y la posición de la perilla de control, así como la posición de los interruptores para el tipo de material y forma de lavado requerido, la salida es ropa limpia. La lavadora de ropa automática es un sistema en lazo abierto puesto que llevará acabo el mismo ciclo de procedimientos de lavado a pesar de que se introduzca ropa sucia o limpia.

c) La entrada es la temperatura requerida y la salida es la temperatura real. El sistema de calefacción central doméstico es un sistema en lazo cerrado puesto que se utiliza un termostato para asegurar que la entrada se ajuste a los cambios en las condiciones de operación y así mantenga una temperatura constante.

Elementos básicos de un sistema en lazo abierto

Se puede considerar que un sistema en lazo abierto consiste en algunos subsistemas básicos arreglados como se muestra en la figura 1.7. Estos elementos pueden ser distintos, equipos separados, pero todas las funciones que cumple cada subsistema se deben preservar. La entrada global al sistema es una señal, que, basada en experiencias anteriores, es probable que conduzca a la salida requerida. Los subsistemas son:

1 *Elemento de control.* Este elemento determina qué acción se va a tomar dada una entrada al sistema de control.
2 *Elemento de corrección.* Este elemento responde a la entrada que viene del elemento de control e inicia la acción para producir el cambio en la variable controlada al valor requerido.
3 *Proceso.* El proceso o planta es el sistema en el que se va a controlar la variable.

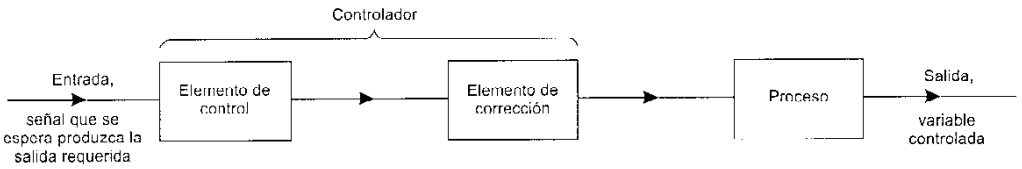


Figura 1.7 Subsistemas en un sistema de control en lazo abierto

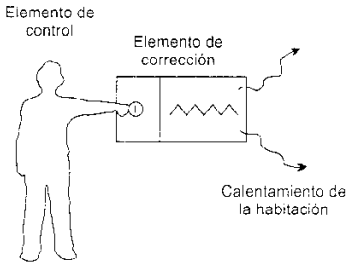


Figura 1.8 Sistema de control en lazo abierto de la temperatura de la habitación

Los primeros dos subsistemas a menudo se unen para formar un elemento denominado *controlador*.

Un ejemplo de un sistema en lazo abierto es un calefactor eléctrico utilizado para calentar una habitación (figura 1.8). Con dicho sistema se tiene:

Variable controlada	–	temperatura de la habitación
Elemento de control	–	una persona que toma las decisiones basadas en la experiencia de las temperaturas producidas mediante la conmutación del elemento calefactor
Elemento de corrección	–	el interruptor y el elemento calefactor
Proceso	–	la habitación

Muchos sistemas de control en lazo abierto utilizan un elemento de control que envía una señal para iniciar la acción después de algún periodo o una secuencia de señales para iniciar una secuencia de acciones en tiempos diferentes. En tales sistemas el controlador es en esencia un dispositivo de conmutación operado por un reloj. Un ejemplo de un sistema de control de este tipo es el ciclo básico de operación de la lavadora de ropa doméstica (figura 1.9). La secuencia podría ser:

1 Establecer los controles para el tipo de ropa que se va a lavar.
2 Encender e iniciar el reloj.
3 Llenar con agua fría, la válvula que permite la entrada de agua está abierta un tiempo específico.
4 Calentar agua, el calentador se enciende un tiempo específico.
5 Lavar, el tambor de la lavadora de ropa gira un tiempo específico.
6 Vaciar agua, la válvula se abre un tiempo específico.
7 Llenar con agua fría, la válvula que permite la entrada de agua se abre un tiempo específico.
8 Enjuagado, el tambor de la lavadora de ropa gira un tiempo específico.
9 Vaciar agua, la válvula se abre un tiempo específico.
10 Exprimido, la válvula se abre un tiempo específico.
11 Paro, después de que ha transcurrido cierto tiempo.

Además del sistema de control en lazo abierto descrito, es probable que la lavadora de ropa tenga algunos otros sistemas de control de seguridad, por ejemplo, sistemas de nivel de agua y temperatura que pueden apagar el sistema si el nivel de agua o temperatura sube demasiado.

Ejemplo 2

Identifique los subsistemas en un sistema en lazo abierto de un motor de velocidad controlada.

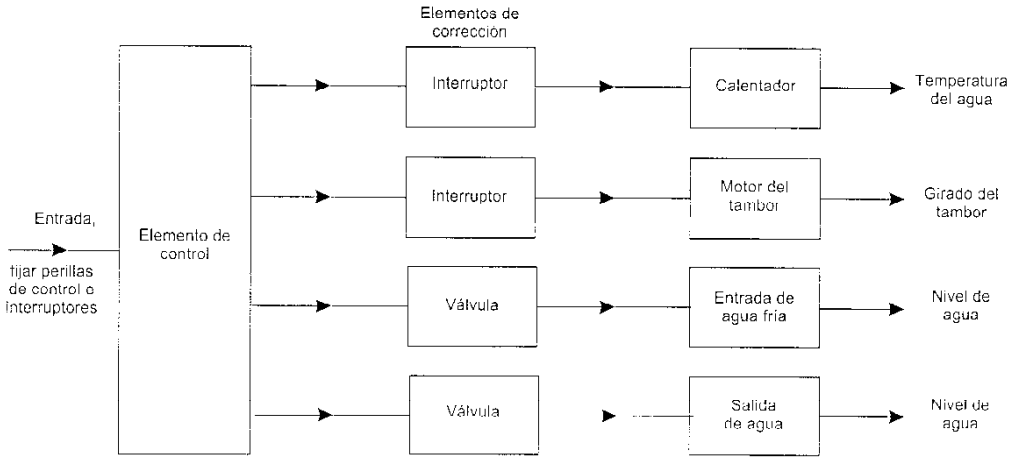


Figura 1.9 Lavadora de ropa doméstica

Respuesta

Variable controlada	–	velocidad del motor
Elemento de control	–	una persona que toma las decisiones basadas en la experiencia de las velocidades producidas al encender el motor
Elemento de corrección	–	el interruptor
Proceso	–	el motor

Elementos básicos de un sistema en lazo cerrado

Se puede considerar que un sistema en lazo cerrado consiste en algunos subsistemas básicos ordenados como muestra la figura 1.10. Estos elementos pueden no ser partes distintas o equipos separados, pero todas las funciones de los subsistemas estarán presentes. La entrada global al sistema de control es el valor requerido de la variable, y la salida es el valor real de la variable.

1 *Elemento de comparación.* Este elemento compara el valor requerido o de referencia de la variable por controlar con el valor medido de lo que se obtiene a la salida, y produce una señal de error la cual indica la diferencia del valor obtenido a la salida y el valor requerido

$$\text{Señal de error} = \text{señal del valor de referencia} - \text{señal del valor medido}$$

2 *Elemento de control.* Este elemento decide qué acción tomar cuando se recibe una señal de error. A menudo se utiliza el término *controlador* para un elemento que incorpora el elemento de control y la unidad de corrección.

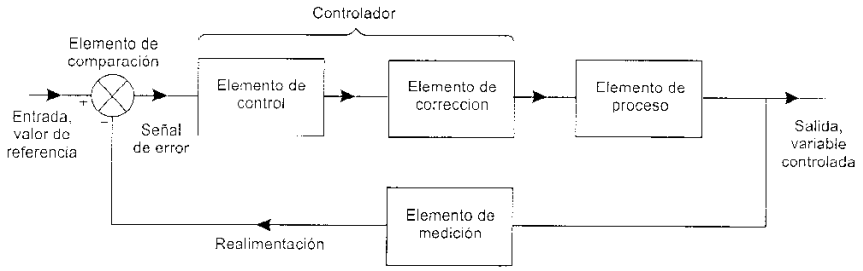


Figura 1.10 Subsistemas en un sistema de control en lazo cerrado

3 *Elemento de corrección.* Este elemento se utiliza para producir un cambio en el proceso al eliminar el error, y con frecuencia se denomina *actuador*.
4 *Elemento proceso.* El proceso, o planta, es el sistema donde se va a controlar la variable.
5 *Elemento de medición.* Este elemento produce una señal relacionada con la condición de la variable controlada, y proporciona la señal de realimentación al elemento de comparación para determinar si hay o no error.

Una característica necesaria de un sistema de control en lazo cerrado es el *lazo de realimentación*. Este es el medio a través del cual una señal relacionada con la variable real obtenida se realimenta para compararse con la señal de referencia. Se dice que se tiene *realimentación negativa* cuando la señal realimentada se sustrae del valor de referencia, esto es,

Señal de error = valor de referencia – señal de realimentación

La realimentación negativa es necesaria para que logre el control. La *realimentación positiva* se presenta cuando la señal realimentada se adiciona al valor de referencia, esto es,

Señal de error = valor de referencia + señal de realimentación

En la figura 1.10 la señal de realimentación se combina con el valor de referencia en el elemento de comparación. El elemento de comparación se indica mediante un círculo con una cruz, éste es el símbolo genérico para indicar un elemento de suma. Cuando en el elemento de comparación hay realimentación negativa, el valor de referencia se marca como una señal positiva y la señal de realimentación como negativa de modo que la salida del elemento de comparación es la diferencia entre las señales. Si hubiera realimentación positiva en el elemento de suma, entonces ambas señales deben marcarse como positivas.

Para ilustrar esta presentación de los elementos de un sistema de control, considere el sistema de control estudiado al principio con la figura 1.6, donde se controló la temperatura de una habitación mediante una persona que encendía y apagaba el elemento calefactor de acuerdo a si la temperatura de la habitación dada por un termómetro tenía o no el valor requerido (figura 1.11). Los elementos de este sistema de control son:

Variable controlada	–	temperatura de la habitación
Valor de referencia	–	temperatura requerida en la habitación
Elemento de comparación	–	persona que compara el valor medido y la temperatura requerida
Señal de error	–	diferencia entre la temperatura requerida y la medida
Elemento de control	–	la persona
Elemento de corrección	–	mano que opera el encendido del elemento calefactor
Proceso	–	habitación
Dispositivo de medición	–	termómetro
Realimentación	–	negativa

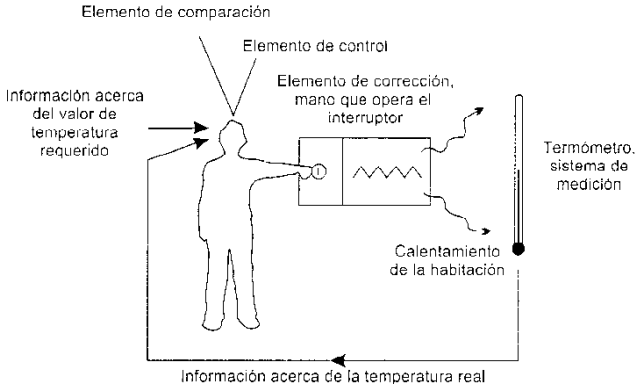

Elemento de comparación
Elemento de control
Elemento de corrección, mano que opera el interruptor
Información acerca del valor de temperatura requerido
Termómetro, sistema de medición
Calentamiento de la habitación
Información acerca de la temperatura real

Figura 1.11 Sistema de control en lazo cerrado para la temperatura de una habitación

Ejemplo 3

El tostador doméstico es un sistema en lazo abierto (ejemplo 1), sugiera los medios que permiten hacerlo un sistema de control en lazo cerrado.

Respuesta

Para que el tostador sea un sistema en lazo cerrado debe haber una señal de realimentación que indique el grado del tono dorado del pan. Las posibilidades son: una persona que mira el pan o quizás una fotocelda que responda al grado de dorado. La salida de cualesquiera de estos "sistemas de medición" sería una señal obtenida de la señal de referencia utilizada para especificar el grado del tono dorado requerido. Se puede utilizar esta señal para activar un relevador que encienda o apague el elemento de tostado o un potenciómetro que varíe el voltaje aplicado al elemento de tostado. La figura 1.12 muestra una forma de dicho sistema de control.

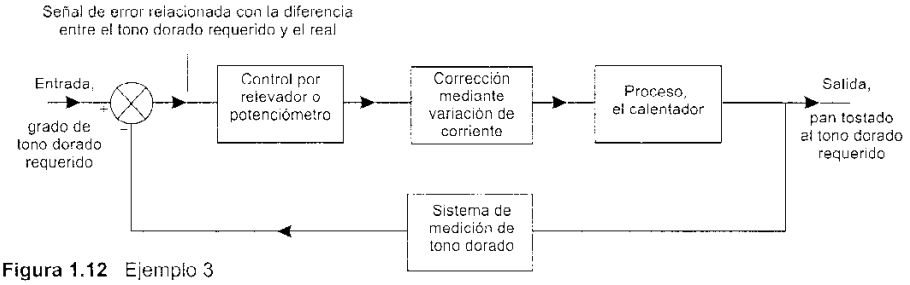

Señal de error relacionada con la diferencia entre el tono dorado requerido y el real
Entrada,
grado de tono dorado requerido
+
−
Control por relevador o potenciómetro
Corrección mediante variación de corriente
Proceso, el calentador
Salida,
pan tostado al tono dorado requerido
Sistema de medición de tono dorado

Figura 1.12 Ejemplo 3

Ejemplos de sistemas de control en lazo cerrado

La figura 1.13 muestra un ejemplo de un sistema de control sencillo utilizado para mantener constante el nivel de agua en un tanque. El valor de referencia es la posición inicial en el brazo (del flotador), de modo que cierra el suministro de agua en el nivel requerido. Cuando el agua sale del tanque, el flotador baja con el nivel de agua. Esto propicia que el brazo del flotador se mueva y permita que el agua entre al tanque. Este flujo continúa hasta que el flotador sube a una altura tal, que haya movido el brazo del flotador y cerrado el suministro de agua. Éste es un sistema de control en lazo cerrado y sus elementos son:

Variable controlada	–	nivel de agua en el tanque
Valor de referencia	–	posición inicial en el brazo del flotador
Elemento de comparación	–	brazo del flotador
Señal de error	–	diferencia entre la posición real del brazo y su posición inicial
Elemento de control	–	brazo pivoteado
Elemento de corrección		aleta de apertura o cierre del suministro de agua
Proceso	–	agua en el tanque
Dispositivo de medición	–	el flotador y el brazo que lo sostiene
Realimentación	–	negativa

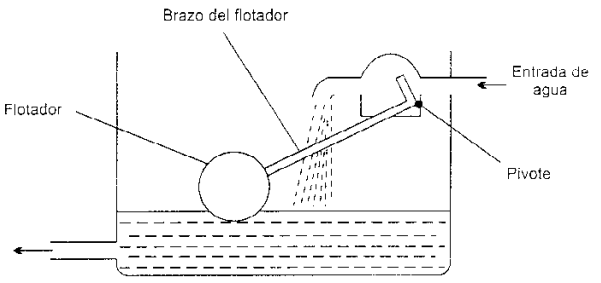


Figura 1.13 Control automático del nivel de agua en un tanque

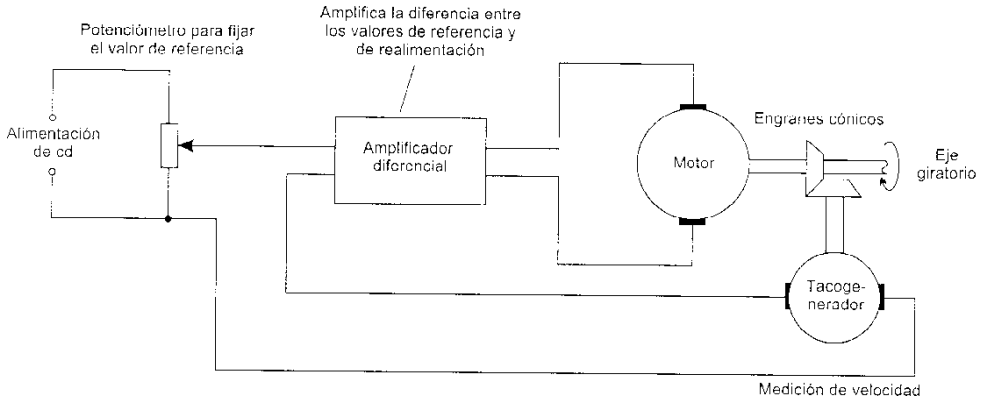


Figura 1.14 Control automático de la velocidad de un eje

La figura 1.14 muestra un sistema de control automático sencillo para la velocidad angular de un eje. Se utiliza un potenciómetro para fijar el valor de referencia, es decir, qué voltaje se aplica al amplificador diferencial como valor de referencia para la velocidad angular requerida. El amplificador diferencial se usa tanto para comparar como para amplificar la diferencia entre los valores de referencia y realimentación, esto es, amplifica la señal de error. Después, la señal de error amplificada se aplica al motor que, a su vez, ajusta la velocidad del eje giratorio. La velocidad angular del eje se mide con un tacogenerador, conectado al eje por medio de un par de engranes cónicos. La señal que viene del tacogenerador se realimenta al amplificador diferencial. De este modo, el sistema está formado por:

Variable controlada	–	velocidad angular del eje
Valor de referencia	–	voltaje especificado para la velocidad requerida
Elemento de comparación	–	amplificador diferencial
Señal de error	–	diferencia entre el voltaje del valor de referencia y el voltaje de realimentación
Elemento de control	–	amplificador
Elemento de corrección	–	motor
Proceso	–	eje giratorio
Dispositivo de medición	–	tacogenerador
Realimentación	–	negativa

En la vida diaria existen muchos sistemas de control sencillos. El acto de intentar levantar una tasa de café de la mesa requiere un sistema de control con realimentación. La mano que levanta la tasa se debe mover al lugar correcto, sorteando los obstáculos en el camino,

Los ojos observan la posición de la mano en relación con la tasa
Movimientos de brazo y muñeca utilizados para corregir la ubicación de la mano

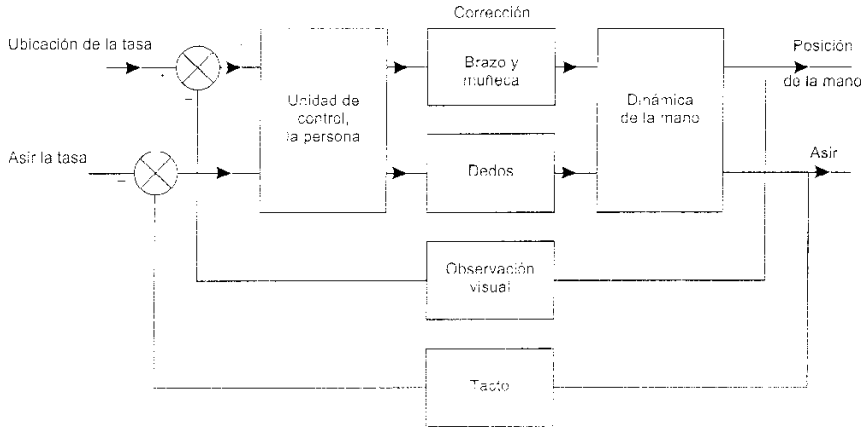
Figura 1.15 Movimiento para levantar una tasa de café

y debe quedar en la posición adecuada para que los dedos puedan asir la oreja de la tasa justo en la forma apropiada y levantarla. Para controlar la mano se llevan a cabo dos tareas de realimentación: visión y tacto (figura 1.15). Así, para el sistema de control utilizado al mover la mano al lugar a donde se localiza la tasa, se tiene:

Variable controlada	–	ubicación de la mano en relación a la tasa
Valor de referencia	–	ubicación de la tasa
Elemento de comparación	–	la persona
Señal de error	–	diferencia entre las ubicaciones real y requerida de la mano
Elemento de control		la persona
Unidad de corrección	–	el brazo y la muñeca
Proceso	–	dinámica de la mano
Dispositivo de medición	–	observación visual
Realimentación	–	negativa

En muchos sistemas de control se tiene sólo una variable que controlar, por ejemplo, el nivel de agua en un tanque, la velocidad angular de un eje o la ubicación de la mano. Sin embargo, existen algunos sistemas de control en los que debe controlarse más de una variable. Un ejemplo es el acto de levantar una tasa de café, puesto que no sólo se debe controlar la ubicación de la mano sino también la presión ejercida por los dedos al momento de asir la oreja de la tasa. Aquí, se tienen dos lazos de realimentación, uno concerniente con la ubicación, el cual utiliza la visión como medio de medición, y el otro relativo a la presión, que emplea el tacto como medio de medición (figura 1.16). Esto se puede considerar como una forma básica de un

Figura 1.16 Levantar una tasa de café



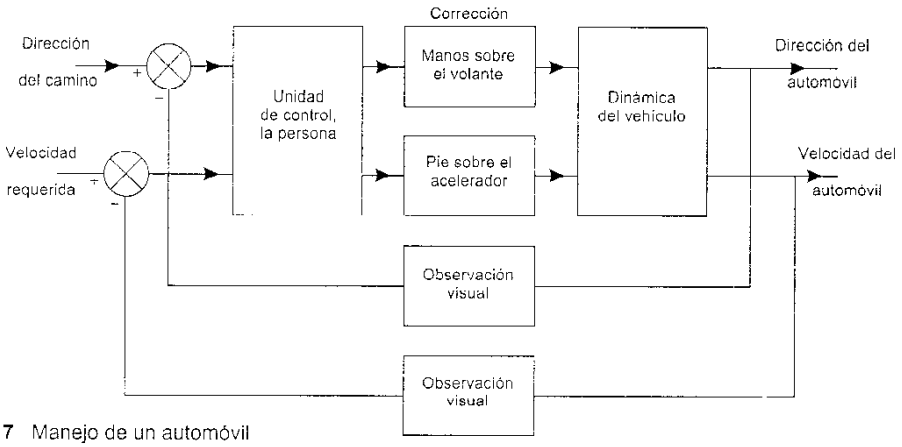


Figura 1.17 Manejo de un automóvil

brazo robótico con una pinza de sujeción diseñado para levantar objetos en una línea de producción.

Otro ejemplo de un sistema de control con dos variables por controlar es manejar un automóvil, éstas son, la dirección y la velocidad del automóvil (figura 1.17).

Variable controlada	– dirección del automóvil en el camino
Valor de referencia	– dirección requerida a lo largo del camino
Elemento de comparación	– la persona
Señal de error	– diferencia entre la dirección requerida y la dirección real
Elemento de control	– la persona
Elemento de corrección	– manos sobre el volante
Proceso	– dinámica del vehículo
Dispositivo de medición	– observación visual
Realimentación	negativa
Variable controlada	– velocidad del automóvil en el camino
Valor de referencia	– velocidad requerida en el camino
Elemento de comparación	– la persona
Señal de error	– diferencia entre la velocidad requerida y la velocidad real
Elemento de control	– la persona
Elemento de corrección	pies sobre los pedales del acelerador o freno
Proceso	– dinámica del vehículo

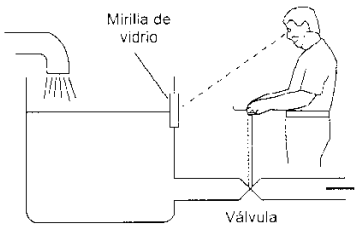


Figura 1.18 Ejemplo 4

Dispositivo de medición – observación visual
Realimentación – negativa

Ejemplo 4

Un trabajador mantiene el nivel de líquido en un contenedor a un nivel constante. Para esto se observa el nivel a través de una mirilla de vidrio en una de las paredes del tanque, y ajusta la cantidad de líquido que sale del tanque con la apertura o cierre de una válvula (figura 1.18). Para dicho sistema de control, ¿cuáles son: *a*) la variable controlada, *b*) el valor de referencia, *c*) el elemento de comparación, *d*) la señal de error, *e*) el elemento de control, *f*) el elemento de corrección, *g*) el proceso y *h*) el dispositivo de medición?

Respuesta

Variable controlada – nivel de líquido en el tanque
Valor de referencia – nivel requerido, tal vez marcado en el vidrio
Elemento de comparación – la persona
Señal de error – diferencia entre los niveles requerido y real
Elemento de control – la persona
Elemento de corrección – válvula
Proceso – agua en el contenedor
Dispositivo de medición – observación visual de la mirilla de vidrio

Estrategias de control

El elemento de control tiene como entrada la señal de error y como salida una señal que se convierte en la entrada a la unidad de corrección de modo que se pueda iniciar la acción para eliminar el error. Existen varias formas para que el elemento de control reaccione ante una señal de error.

Con sistemas de control en lazo abierto los tipos de control más probables son el de dos posiciones (encendido-apagado o mejor conocido como on-off) o secuencias o acciones conmutadas por tiempo. Un ejemplo del control on-off es una persona que enciende un calefactor eléctrico para obtener la temperatura requerida en una habitación. Un ejemplo de una secuencia conmutada por tiempo es la operación de la lavadora de ropa doméstica (vea detalles al principio de este capítulo).

Con sistemas de control en lazo cerrado los tipos de control son a menudo el control de dos posiciones, el control proporcional o el control proporcional combinado con algún otro refinamiento. Con el *modo de control de dos posiciones*, la señal de error de entrada al elemento de control es una salida de encendido o de apagado, que se utiliza para encender o apagar al elemento de corrección (figura 1.19). Así, en el caso del sistema de calefacción central doméstico

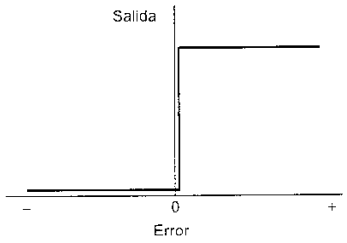


Figura 1.19 Modo de control de dos posiciones

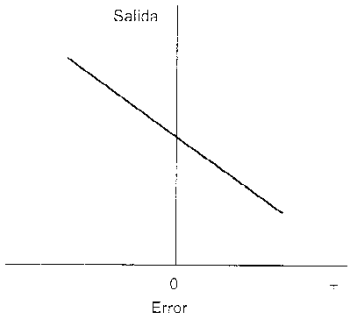


Figura 1.20 Control proporcional

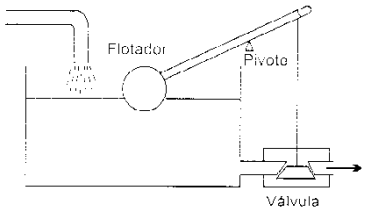


Figura 1.21 Sistema de control de nivel proporcional

controlado por un termostato, éste produce una salida que enciende o apaga el calefactor según el error. Si la temperatura de la habitación baja de cierto valor, entonces el termostato enciende el calefactor; si por el contrario, la temperatura rebasa el valor fijado, el calefactor se apaga.

Con el *control proporcional* la salida del elemento de control es una señal, la cual es proporcional al error: cuanto mayor sea el error mayor será la salida (figura 1.20). Esto significa que el elemento de corrección recibirá una señal que depende de la magnitud de la corrección que se necesite. En la figura 1.21 se muestra un ejemplo de tal sistema de control para mantener constante el nivel de un líquido. Los cambios en el nivel producen un movimiento del flotador y, por lo tanto del brazo móvil que lo sostiene. A su vez, esto cambia la apertura de la válvula y afecta la tasa a la que el líquido sale del tanque. Cuanto mayor sea el error en el nivel del líquido mayor será el cambio en la apertura de la válvula.

Debido a que el control proporcional por sí solo puede presentar algunos problemas, con frecuencia se combina con otras formas de control. Existe el *control derivativo*, donde la salida es proporcional a la razón de cambio de la señal de error, y el *control integral*, donde la salida en el tiempo t es proporcional a la integral de la señal de error entre $t = 0$ y t. Un ejemplo sencillo del control proporcional derivativo es un vehículo automático donde el controlador toma acciones basadas no sólo en el conocimiento de la posición del vehículo, sino también de su velocidad, es decir, la razón de cambio de la distancia. Con sólo el control proporcional, el controlador da nada más una respuesta en proporción a la magnitud del error de la posición requerida. No toma en cuenta la rapidez del cambio del error. El control derivativo sí lo hace. Así, si el vehículo se empieza a mover alejándose rápido de la trayectoria requerida, con el control derivativo habrá una acción correctiva mucho mayor que si el vehículo se alejara lentamente de la trayectoria requerida. De este modo, la combinación del control proporcional derivativo toma en cuenta más rápido las desviaciones de la trayectoria requerida y las corrige. Las formas de estrategias de control descritas se estudiarán con mayor detalle en el capítulo 8.

Ejemplo 5

¿Qué tipo de estrategia de control se usa en los siguientes sistemas de control?

a) Un refrigerador.
b) Guiado de un automóvil en un camino.

Respuesta

a) En el refrigerador un termostato controla la temperatura y es probable que sea un sistema de control simple de dos posiciones, on-off.
b) Tal vez sea un control proporcional en el que la salida del controlador, es decir, movimiento del volante por parte del conductor, puede ser proporcional al error.

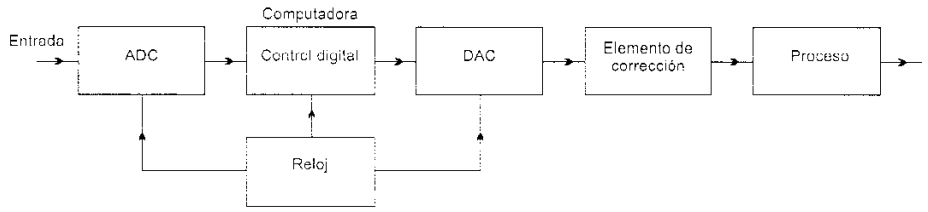


Figura 1.22 Sistema de control digital en lazo abierto para sistemas en tiempo continuo

Control digital

El control digital mediante microprocesadores se usa cada día más en sistemas de control. La figura 1.22 muestra la forma básica que puede tomar un sistema de control digital en lazo abierto, cuando la entrada es una señal continua en el tiempo, es decir, una señal que puede variar de manera continua con el tiempo y no es digital. La señal de entrada pasa primero a través de un convertidor analógico a digital (ADC[1]). Éste la convierte en una señal digital, un número codificado. El elemento de control digital incorpora un reloj que envía pulsos a intervalos regulares. Cada vez que el ADC recibe un pulso, envía el número codificado al elemento de control digital. El elemento de control digital implanta una estrategia de control mediante un programa almacenado. Como es fácil modificar dicho programa la estrategia de control también es sencillo cambiarla y esta flexibilidad es una gran ventaja sobre los sistemas de control analógico donde la estrategia de control está determinada por equipos físicos. La señal de salida del elemento de control también tiene en forma digital, un número codificado. Éste se convierte a una señal analógica mediante un convertidor digital a analógico (DAC) de modo que puede accionar al elemento de corrección para producir el cambio requerido en la variable de proceso.

La secuencia de pasos que tienen lugar en los cuatro bloques que constituyen el elemento de control son:

1 Esperar un pulso de reloj.
2 Hacer una conversión de analógico a digital de la señal de entrada en ese tiempo.
3 Calcular la señal de control de acuerdo con la estrategia de control en el programa.
4 Llevar a cabo la conversión de digital a analógico de la señal de control.
5 Actualizar el estado de la unidad de corrección.
6 Esperar un pulso de reloj y entonces repetir todo el ciclo.

Puesto que la entrada se muestrea sólo en ciertos tiempos, un sistema de este tipo con frecuencia recibe el nombre de *un sistema de datos*

[1] N. de T.: En este libro se utilizarán ADC y DAC, por sus siglas en inglés, para referirse a los convertidores analógico a digital y digital a analógico, ya que son las de uso más común.

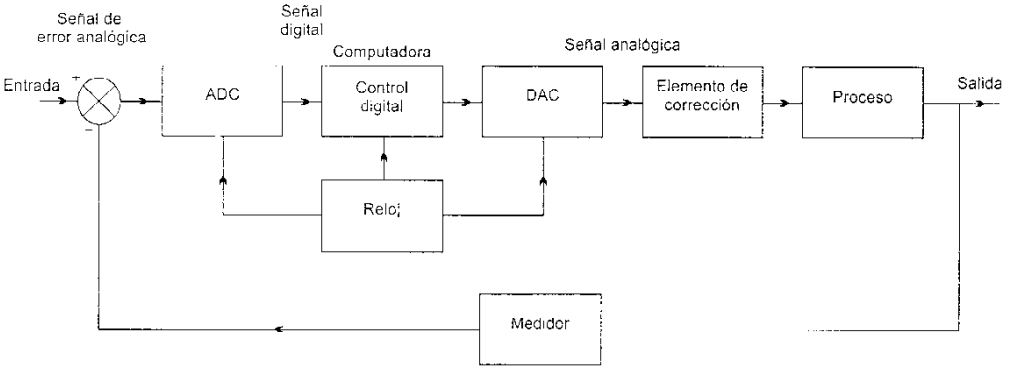


Figura 1.23 Sistema de control digital en lazo cerrado para sistemas en tiempo continuo

muestreados. El muestreo es un aspecto fundamental en los sistemas controlados digitalmente.

La figura 1.23 muestra la forma que puede tomar un sistema de control digital en lazo cerrado para sistemas en tiempo continuo. La señal de error analógica del elemento de comparación se convierte en una señal de error digital mediante un convertidor analógico a digital (ADC), modificada por el elemento de control digital de acuerdo con la estrategia de control programada y después se convierte a una señal analógica para el elemento de corrección mediante un convertidor digital a analógico (DAC). La secuencia de pasos que tienen lugar en el elemento de control son como los descritos para el sistema en lazo abierto.

Se puede utilizar una sola computadora para controlar varias variables. Por ejemplo, la lavadora de ropa doméstica descrita en la figura 1.9 puede utilizar un microprocesador como elemento de control. Los sistemas de control digital tienen muchas aplicaciones, como en máquinas herramienta, control de aviones y robots. Un estudio más detallado de los sistemas de control digital se presenta en el capítulo 14.

Modelos matemáticos para sistemas

Con la finalidad de entender el comportamiento de los sistemas es necesario obtener modelos matemáticos que los representan. El modelo de un barco es una réplica a escala de un barco de tamaño natural. En el modelo los tamaños relativos de las diferentes partes guardan las mismas proporciones que en el barco de tamaño natural, es decir, hay un escalamiento constante hacia abajo de los tamaños. Una fotografía se puede considerar un modelo de la escena que se fotografió. Un *modelo matemático* de un sistema es una "réplica" de las relaciones entre entrada y salida o entre entradas y salidas. Las relaciones reales entre la entrada y la salida de un sistema se sustituyen por expresiones matemáticas.

Considere un motor como sistema. La entrada al motor es un voltaje V y la salida es una velocidad angular ω del eje. Para muchos sistemas existen *relaciones lineales* razonables entre la entrada y la salida. Esto significa que la salida es proporcional a la entrada y si la

entrada se duplica, entonces la salida también se duplica, es decir, si la entrada se multiplica por una constante multiplicativa entonces la salida se multiplica por la misma constante. Esto también quiere decir que si la entrada 1 produce una salida 1 y la entrada 2 produce una salida 2, entonces una entrada igual a la suma de las entradas 1 y 2 producirá una salida igual a la suma de las salidas 1 y 2. De este modo, si existe una relación lineal entre la salida y la entrada para el motor, entonces el modelo matemático es:

$$\omega = GV$$

donde G es la constante de proporcionalidad. Esta relación implica que si el voltaje cambia, entonces deberá haber un cambio inmediato correspondiente en la velocidad angular del eje. Éste no será el caso, puesto que el motor toma un tiempo para que el eje cambie a la nueva velocidad. Así la relación existe, sólo entre el voltaje y la velocidad cuando el sistema ha tenido suficiente tiempo para asentarse ante cualquier cambio en la entrada, es decir, esto se refiere a lo que se denomina condición de *estado estable*. Entonces, para aclarar, la ecuación se puede escribir como:

$$\text{Valor en estado estable de } \omega = G\,(\text{valor en estado estable de } V)$$

Por lo tanto

$$G = \frac{\text{valor en estado estable de } \omega}{\text{valor en estado estable de } V}$$

La constante G se denomina *función de transferencia* o *ganancia* del sistema. En general, se puede definir la función de transferencia como el cociente de la salida en estado estable entre la entrada en estado estable para un sistema o subsistema.

$$\text{Función de transferencia } G = \frac{\text{salida en estado estable}}{\text{entrada en estado estable}} \qquad [1]$$

Por ejemplo, al insertar una moneda en una máquina de barras de chocolate se obtiene la salida de una barra de chocolate. La función de transferencia, para el estado estable, es 1 barra/moneda. Si se supone que el sistema es lineal, para una entrada de dos monedas se obtendrían dos barras de chocolate. Un sistema de medición de temperatura puede tener una entrada de 10 °C y producir una salida en estado estable de 5.0 mV. Este sistema tiene una función de transferencia de 0.5 mV/°C. Si se supone que el sistema es lineal se puede predecir que si la entrada fuera de 20 °C entonces la salida en estado estable sería 10.0 mV. El modelo matemático del sistema es

$$\text{Salida en estado estable en mV} = 0.5 \times \text{entrada en estado estable en °C}$$

Lo anterior es el análisis de un sistema que tiene una relación lineal entre la entrada y la salida. Sin embargo, los sistemas reales

pueden exhibir un comportamiento no lineal. En muchos casos tales sistemas son lineales si las señales de entrada se mantienen dentro de ciertos límites. Para la máquina de barras de chocolate el sistema es lineal siempre que no se inserta un mayor número de monedas que las barras de chocolate que tiene la máquina. Un amplificador puede ser lineal sólo para señales de entrada hasta cierta magnitud.

Más adelante en este libro se considerarán las definiciones de función de transferencia en las que se pueden tomar en cuenta no sólo los valores en estado estable de la entrada y la salida, sino también los cambios transitorios que tienen lugar en el tiempo. Así, en el resto de este capítulo las discusiones se basan en el comportamiento de los sistemas en términos de los valores en estado estable, y habrá que considerarlos sólo como una representación muy simplista de los sistemas de control.

Ejemplo 6

Un motor tiene una función de transferencia de 500 rev/min por volt. ¿Cuál será la velocidad de salida en estado estable para tal motor cuando la entrada es 12 V?

Respuesta

Si se utiliza la ecuación [1]

$$\text{Función de transferencia } G = \frac{\text{salida en estado estable}}{\text{entrada en estado estable}}$$

entonces,

$$\text{Salida en estado estable} = G(\text{entrada en estado estable})$$
$$= 500 \times 12 = 6000 \text{ rev/min}$$

Modelos matemáticos para sistemas en lazo abierto

Existen muchas situaciones donde se requiere la función de transferencia para varios elementos en serie. Considere tres elementos en serie como se muestra en la figura 1.24. Los tres elementos pueden ser un sistema en lazo abierto puesto que no hay lazo de realimentación, o sólo tres elementos en serie de un sistema más grande.

Para el elemento 1 la función de transferencia G_1 es la salida θ_1 dividida entre la entrada θ_i. Así,

$$G_1 = \frac{\theta_1}{\theta_i}$$

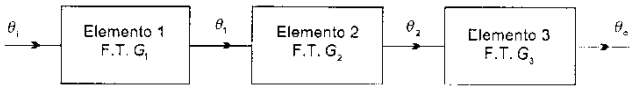


Figura 1.24 Función de transferencia con un sistema de lazo abierto

Para el elemento 2 la función de transferencia G_2 es la salida θ_2 dividida entre la entrada θ_1. Es decir,

$$G_2 = \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

Para el elemento 3 la función de transferencia G_3 es la salida θ_o dividida entre la entrada θ_2. Esto es,

$$G_3 = \frac{\theta_o}{\theta_2}$$

La función de transferencia global del sistema es la salida θ_o dividida entre la entrada θ_i. Pero esto se puede escribir como

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{\theta_1}{\theta_i} \times \frac{\theta_2}{\theta_1} \times \frac{\theta_o}{\theta_2}$$

Por lo tanto, para el sistema en lazo abierto

$$\text{Función de transferencia} = G_1 \times G_2 \times G_3 \qquad [2]$$

La función de transferencia global en lazo abierto es el producto de las funciones de transferencia de los elementos individuales. Esto se aplica a cualquier número de elementos conectados en serie.

Ejemplo 7

El sistema de medición empleado en un sistema de control consta de dos elementos, un sensor y un acondicionador de señal en serie (figura 1.25). Si el sensor tiene una función de transferencia de 0.1 mA/Pa y el acondicionador de señal una función de transferencia de 20, ¿cuál es la función de transferencia del sistema de medición?

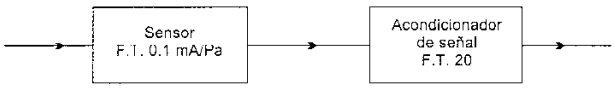


Figura 1.25 Ejemplo 7

Respuesta

El sensor y el acondicionador de señal están en serie, de modo que la función de transferencia combinada es el producto de las funciones de transferencia de los elementos individuales.

$$\text{Función de transferencia} = 0.1 \times 20 = 2\ \text{mA/Pa}$$

Modelos matemáticos para sistemas en lazo cerrado

La figura 1.26 muestra un sistema en lazo cerrado sencillo. Si θ_i es el valor de referencia, es decir, la entrada, y si θ_o es el valor real, es decir, la salida del sistema, entonces la función de transferencia del sistema completo es

$$\text{Función de transferencia} = \frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{\theta_i}{\theta_o}$$

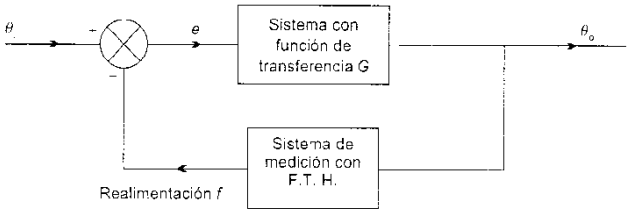


Figura 1.26 Función de transferencia de un sistema en lazo cerrado

Cada subsistema en el sistema global tiene su propia función de transferencia. De este modo, si el sistema que se controla tiene una función de transferencia G, entonces con su entrada de la señal de error e y salida θ_o,

$$G = \frac{\theta_o}{e}$$

Si la trayectoria de realimentación tiene una función de transferencia H, con entrada θ_o y salida f,

$$H = \frac{f}{\theta_o}$$

La señal de error e es la diferencia entre θ_i y f, la señal de realimentación f es una medida de la salida del sistema completo.

$$e = \theta_i - f$$

Al sustituir e y f, despejándolas a partir de las dos ecuaciones anteriores,

$$\frac{\theta_o}{G} = \theta_i - H\theta_o$$

$$\theta_o\left(\frac{1}{G} + H\right) = \theta_i$$

$$\theta_o\left(\frac{1 + GH}{G}\right) = \theta_i$$

Por lo tanto, la función de transferencia global del sistema de control en lazo cerrado es

$$\text{Función de transferencia} = \frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{G}{1 + GH} \qquad [3]$$

La ecuación anterior se aplica a realimentación negativa. Con realimentación positiva el denominador de la ecuación anterior se convierte en $(1 - GH)$.

En el sistema en lazo cerrado, G se conoce como la *función de transferencia de la trayectoria directa*, puesto que es la función de transferencia que relaciona las señales que se mueven hacia adelante a través del sistema de la entrada a la salida. GH se conoce como *función de transferencia de lazo*, ya que es el término que se presenta en la expresión como resultado del lazo de realimentación.

Ejemplo 8

Un motor de velocidad controlada tiene un sistema motor-relevador-amplificador con una función de transferencia combinada de 600 rev/min por volt y un sistema de medición en el lazo de realimentación con una función de transferencia de 3 mV por rev/min, como ilustra la figura 1.27. ¿Cuál es la función de transferencia global?

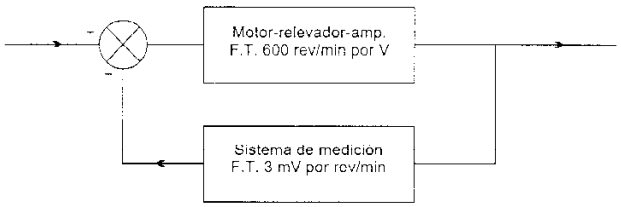


Figura 1.27 Ejemplo 8

Respuesta

El sistema tendrá realimentación negativa y así la función de transferencia global está dada por la ecuación [3] como

$$\text{Función de transferencia} = \frac{G}{1+GH}$$
$$= \frac{600}{1+600\times 0.003}$$
$$= 214 \text{ rev/min por volt}$$

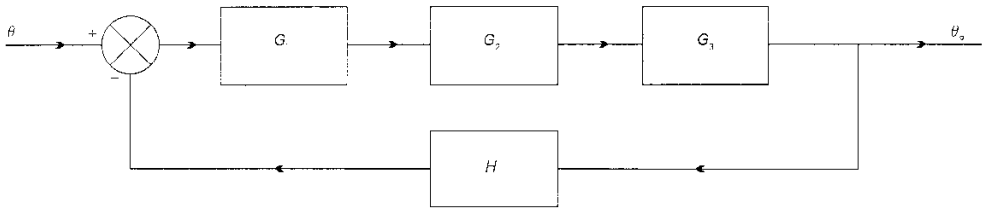
Modelos matemáticos para sistemas en lazo cerrado con elementos múltiples

Considere el sistema en lazo cerrado que muestra la figura 1.28. La función de transferencia para el sistema completo se puede obtener determinando primero la función de transferencia para los tres elementos en serie. Como éstos tienen funciones de transferencia G_1, G_2 y G_3, entonces la función de transferencia combinada es

$$\text{F.T. de los elementos en serie} = G_1 \times G_2 \times G_3$$

El sistema en lazo cerrado de la figura 1.28 se puede reemplazar por el sistema equivalente más sencillo, como se muestra en la figura 1.29. Ahora, éste es sólo un elemento con una función de transferencia de $G_1 \times G_2 \times G_3$ y un lazo de realimentación con una función de transferencia H. La función de transferencia global para este sistema es entonces

Figura 1.28 Función de transferencia de un sistema en lazo cerrado con elementos múltiples



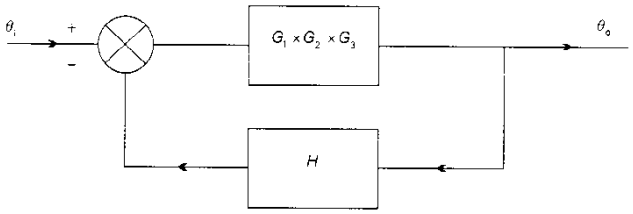


Figura 1.29 Sistema equivalente para la figura 1.28

$$\text{F.T. del sistema} = -\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{G_1 \times G_2 \times G_3}{1 + (G_1 \times G_2 \times G_3)H} \qquad [4]$$

Ejemplo 9

Un sistema de control de posición utilizado con una máquina herramienta tiene un amplificador en serie con una válvula corrediza y un lazo de realimentación con un sistema de medición de desplazamiento (figura 1.30). Si las funciones de transferencia son las siguientes, ¿cuál es la función de transferencia global para el sistema de control?

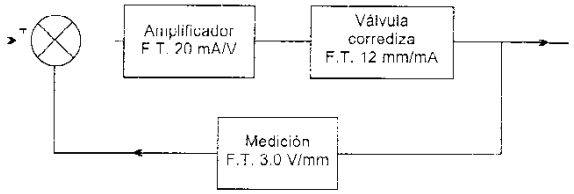


Figura 1.30 Ejemplo 9

Las funciones de transferencia son: amplificador 20 mA/V, válvula corrediza 12 mm/mA, sistema de medición 3.0 V/mm.

Respuesta

El amplificador y la válvula corrediza están en serie, por lo que la función de transferencia combinada para los dos elementos es el producto de sus funciones de transferencia separadas,

$$\text{F.T. para los elementos en serie} = 20 \times 12 = 240 \text{ mm/V}$$

Estos elementos tienen un lazo de realimentación con una función de transferencia de 30 mV/mm. La función de transferencia global para el sistema de control es

$$\text{Función de transferencia} = \frac{G}{1 + GH}$$
$$= \frac{240}{1 + 240 \times 0.030}$$
$$= 29 \text{ mm/V}$$

Error en estado estable

El *error en estado estable* E de un sistema es la diferencia entre la salida del sistema y su entrada cuando las condiciones están en estado estable.

$$E = \theta_o - \theta_i$$

Puesto que para un sistema con una función de transferencia global G_s

$$G_s = \frac{\theta_o}{\theta_i}$$

entonces

$$E = G_s\theta_i - \theta_i = \theta_i(G_s - 1) \qquad [5]$$

Para un sistema en lazo abierto el error en estado estable se puede escribir, según la ecuación [2], como

$$E = \theta_i(G_1G_2G_3 - 1) \qquad [6]$$

donde G_1, G_2 y G_3 son las funciones de transferencia de los elementos en el sistema. Para que el error sea cero, $G_1G_2G_3$ deben ser igual a 1. Aunque esto se puede lograr en la preparación o calibración del sistema, es inevitable que se presenten errores en estado estable debido a que las funciones de transferencia cambian como consecuencia de cambios en el medio ambiente.

Para un sistema en lazo cerrado el error en estado estable, dado por la ecuación [5], se puede escribir empleando la ecuación [3], como

$$E = \theta_i\left(\frac{G}{1+GH} - 1\right) \qquad [7]$$

donde G es la función de transferencia de los elementos en la trayectoria directa, es decir, $G = G_1G_2G_3$ para tres elementos en serie con funciones de transferencia G_1, G_2 y G_3, y H es la función de transferencia del sistema de medición. Para un error en estado estable nulo, se debe tener $G = 1 + GH$ de modo que $G/(1 + GH)$ tenga el valor de 1. Igual que en el sistema de control en lazo abierto, las funciones de transferencia tienden a cambiar con las condiciones ambientales. Sin embargo, si GH es mucho mayor que 1, la ecuación [7] se aproxima a

$$E = \theta_i\left(\frac{1}{H} - 1\right)$$

y así los cambios en las funciones de transferencia de los elementos de la trayectoria directa casi no tienen efecto sobre el error. De esta manera, la sensibilidad del sistema en lazo cerrado para tales efectos es mucho más pequeña que para un sistema en lazo abierto. Ésta es una de las grandes ventajas que tienen los sistemas en lazo cerrado respecto a los sistemas en lazo abierto.

Ejemplo 10

La figura 1.31 muestra un controlador con una función de transferencia de 12 y un motor con una función de transferencia de 0.10 rev/min por V.

a) ¿Cuál será el error en estado estable cuando el sistema es un sistema de control en lazo abierto y cómo cambiará el error si, debido a cambios ambientales, la función de transferencia del motor cambia en 10%?

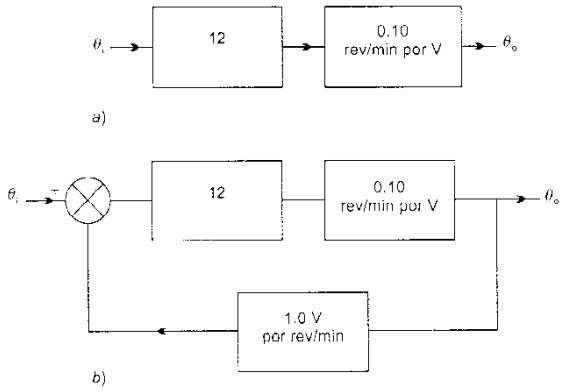


Figura 1.31 Ejemplo 10: *a*) lazo abierto, *b*) lazo cerrado

b) ¿Cuál será el error en estado estable cuando el sistema es un sistema de control en lazo cerrado si el lazo de realimentación tiene una función de transferencia de 1.0 V por rev/min y cómo cambiará el error si, debido a cambios ambientales, la función de transferencia del motor cambia en 10%?

Respuesta

a) Empleando la ecuación [6], antes de que se presente cualquier cambio

$$E = \theta_i(G_1G_2 - 1)$$

$$E = \theta_i(12 \times 0.10 - 1) = 0.2\theta_i$$

Si hay un cambio de 10% en la función de transferencia del motor, es decir, 0.11 rev/min por V, entonces

$$E = \theta_i(12 \times 0.11 - 1) = 0.32\theta_i$$

El error se ha incrementado en un factor de 16.

b) Con la ecuación [7]

$$E = \theta_i\left(\frac{G_1G_2}{1 + G_1G_2H} \quad 1\right)$$

entonces, antes de que ocurra cualquier cambio

$$E = \theta_i\left(\frac{12 \times 0.10}{1 + 12 \times 0.10 \times 1.0} - 1\right) = -0.45\theta_i$$

Si hay un cambio de 10% en la función de transferencia del motor, es decir, 0.11 rev/min por V, entonces

$$E = \theta_i\left(\frac{12 \times 0.11}{1 + 12 \times 0.11 \times 1.0} - 1\right) = -0.43\theta_i$$

El cambio en el error es mucho más pequeño que el cambio que se presenta en el sistema en lazo abierto. El sistema en lazo cerrado tiene una sensibilidad más baja a los cambios ambientales que el sistema en lazo abierto.

Ejemplo 11

Un sistema de control en lazo cerrado tiene una función de transferencia de la trayectoria directa de 10. ¿Cuánto debe ser la función de transferencia de la trayectoria de realimentación para que el error en estado estable sea cero?

Respuesta

Según la ecuación [7]

$$E = \theta_i\left(\frac{G}{1+GH} - 1\right)$$

para que E sea cero, entonces

$$\frac{G}{1+GH} = 1$$

por lo tanto, con $G = 10$, entonces

$$10 = 1 + 10H$$

y, de este modo, H debe ser 0.9.

Efectos de las perturbaciones

Una consideración importante con un sistema de control es el efecto de cualquier perturbación. De esta manera, en un sistema de calefacción central doméstico con un sistema de control en lazo abierto involucrado, el calefactor se enciende para obtener la temperatura requerida en la habitación, ¿qué ocurrirá si alguien abre la ventana y permite que el aire frío entre en la habitación? Tal perturbación se puede incorporar en el diagrama de bloques del sistema de la forma que muestra la figura 1.32. En este caso, la perturbación θ_d se suma a la salida del proceso. Para tal situación se tiene

$$\theta_o = G_1G_2\theta_i + \theta_d \qquad [8]$$

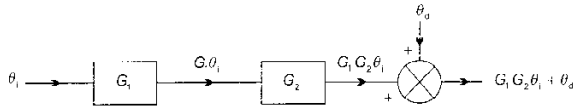


Figura 1.32 Sistema de control en lazo abierto con una perturbación

El término θ_d es el error en estado estable adicionado al sistema por la presencia de la perturbación.

Si la perturbación se adiciona al sistema entre los elementos 1 y 2 (como ilustra la figura 1.33), entonces

$$\theta_o = (G_1\theta_i + \theta_d)G_2 = G_1G_2\theta_i + G_2\theta_d \qquad [9]$$

El término $G_2\theta_d$ es el error en estado estable adicionado al sistema por la presencia de la perturbación.

Con un sistema en lazo cerrado, por ejemplo, en un sistema de calefacción central doméstico si el valor fijado en el termostato no se modifica y alguien abre la ventana y permite que el aire frío entre a la habitación, el sistema de control sujeto a tal perturbación se puede

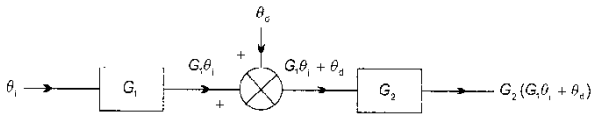


Figura 1.33 Sistema de control en lazo abierto con una perturbación

representar mediante un diagrama de bloques de la forma que muestra la figura 1.34. La señal de error al elemento 1 es $(\theta_i - f)$, donde f es la señal de realimentación. La señal de salida del elemento 1 y entrada al elemento 2 es, $G_1(\theta_i - f)$. La salida del elemento 2 es $G_1G_2(\theta_i - f)$. La perturbación se agrega a éste en este punto y así la salida θ_o es

$$\theta_o = G_1G_2(\theta_i - f) + \theta_d$$

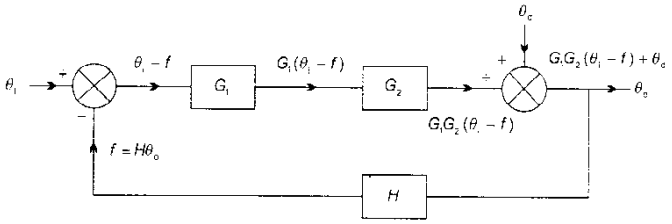


Figura 1.34 Sistema de control en lazo cerrado con una perturbación

Pero la realimentación f es $H\theta_o$. Por tanto

$$\theta_o = G_1G_2(\theta_i - H\theta_o) + \theta_d$$

Reordenando se obtiene

$$\theta_o(1 + G_1G_2H) = G_1G_2\theta_i + \theta_d$$

$$\theta_o = \theta_i\left(\frac{G_1G_2}{1 + G_1G_2H}\right) + \theta_d\left(\frac{1}{1 + G_1G_2H}\right) \qquad [10]$$

El término $\theta_d[1/(1 + G_1G_2H)]$ es el error en estado estable que se incorpora al sistema mediante la perturbación. Si esta ecuación se compara con la situación en lazo abierto, es decir, la ecuación [8], se verá que el efecto de la perturbación se modifica por el factor $1/(1 + G_1G_2H)$. Esta propiedad de modificar el efecto de una perturbación se denomina *rechazo a perturbaciones*.

La figura 1.35 muestra un sistema en lazo cerrado y la perturbación se presenta entre los dos elementos de la trayectoria directa. Para el sistema la entrada al primer elemento es $(\theta_i - f)$ y su salida es $G_1(\theta_i - f)$. Ésta se combina con la perturbación θ_d para dar la entrada al segundo elemento. Así, la salida de este elemento θ_o es

$$\theta_o = G_2[G_1(\theta_i - f) + \theta_d]$$

Puesto que $f = H\theta_o$, entonces

$$\theta_o = G_2[G_1(\theta_i - H\theta_o) + \theta_d]$$

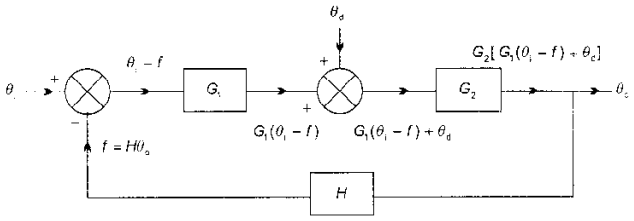


Figura 1.35 Sistema de control en lazo cerrado con una perturbación

Lo cual se puede simplificar a

$$\theta_o[1 + G_1G_2H] = G_2G_1\theta_i + G_2\theta_d$$

$$\theta_o = \theta_i\left(\frac{G_2G_1}{1 + G_1G_2H}\right) + \theta_d\left(\frac{G_2}{1 + G_1G_2H}\right) \qquad [11]$$

El término $\theta_d[G_2/(1 + G_1G_2H)]$ es el error en estado estable que se introduce al sistema mediante la perturbación. Si esta ecuación se compara con la de la situación en lazo abierto, es decir, la ecuación [9], se verá que el efecto de la perturbación se modifica en la situación en lazo cerrado por el factor $G_2/(1 + G_1G_2H)$ y en la situación en lazo abierto sólo por G_2. El factor $1/(1 + G_1G_2H)$ es así una medida de qué tanto se modifican los efectos de la perturbación con el lazo de realimentación. Esta propiedad de modificar el efecto de la perturbación se denomina rechazo a perturbaciones.

De este modo, siempre que se presente una perturbación en el sistema en lazo cerrado, su efecto se reduce por el factor $1/(1 + GH)$, donde G es la función de transferencia de la trayectoria directa $(G = G_1G_2)$ y H es la función de transferencia de la realimentación. Ésta es una de las ventajas de los sistemas de control en lazo cerrado sobre los sistemas de control en lazo abierto: éstos son mucho mejores para aminorar los efectos de las perturbaciones en el sistema.

Las perturbaciones se pueden presentar de varias formas, el término perturbación se puede interpretar como una señal no deseada la cual afecta la salida del sistema. Las perturbaciones pueden venir de fuentes exógenas, por ejemplo, alguien abre una ventana y afecta así el sistema de calefacción para la habitación o quizás el viento que afecta la orientación de la antena del radar o un bache en el camino que afecta el manejo de un vehículo en un camino. Las perturbaciones también pueden venir del interior del sistema, por ejemplo, ruido eléctrico en un amplificador.

Ejemplo 12

Un amplificador electrónico tiene una función de transferencia de 100. ¿Cuánto mejorará el amplificador en el rechazo del ruido generado internamente si éste cuenta con un lazo de realimentación con una función de transferencia de 10?

Respuesta

El efecto de adicionar un lazo de realimentación es el de reducir el efecto de la perturbación en un factor de $1/(1+GH)$. De este modo, el efecto del ruido se reduce en un factor de $1/(1+100\times10)=1/1001$.

Sensibilidad a cambios en los componentes

Con un sistema en lazo abierto la función de transferencia global está dada por la ecuación [2] como

$$\text{Función de transferencia} = G_1 \times G_2 \times G_3$$

donde G_1, G_2 y G_3 son las funciones de transferencia de los elementos en el sistema. Los cambios en las características de estos elementos con el tiempo y las condiciones ambientales pueden resultar en un cambio en la función de transferencia. Así, por ejemplo, si un elemento es un motor, el incremento de la fricción en los rodamientos resultaría en un decremento en la función de transferencia del motor. Un cambio en la función de transferencia del elemento 1 de ΔG_1 significa un cambio en la función de transferencia global para el sistema en lazo abierto de

$$\text{Cambio en la función de transferencia} = \Delta G_1 \times G_2 \times G_3 \quad [12]$$

Con un sistema en lazo cerrado la función de transferencia global está dada por la ecuación [4] como

$$\text{Función de transferencia} = \frac{G_1G_2G_3}{1+G_1G_2G_3H}$$

donde G_1, G_2 y G_3 son las funciones de transferencia de los elementos en la trayectoria directa y H, la función de transferencia de la trayectoria de realimentación. Si $G_1G_2G_3H$ es mucho mayor que 1, entonces la expresión se aproxima a

$$\text{Función de transferencia} = \frac{1}{H}$$

Por ejemplo, cualquier cambio en la función de transferencia del elemento 1 en la trayectoria directa, tendrá un efecto insignificante sobre la función de transferencia global. Esto tiene un marcado contraste con la situación de un sistema en lazo abierto y esta insensibilidad a cambios en las características de los elementos de la trayectoria directa es una de las ventajas de los sistemas en lazo cerrado sobre los sistemas en lazo abierto. Sin embargo, un cambio en la función de transferencia de la trayectoria de realimentación producirá un correspondiente cambio en la función de transferencia global del sistema. El sistema en lazo cerrado no es insensible a cambios en las características de los elementos en la trayectoria de realimentación.

Ejemplo 13

Un amplificador operacional tiene una función en lazo abierto de 200 000 y una función de transferencia en la trayectoria de realimen-

tación de 0.1. ¿Cuál será el cambio porcentual en la función de transferencia global si la función de transferencia del amplificador cambia en 10%?

Respuesta

Para el sistema en lazo cerrado, según la ecuación [3],

$$\text{Función de transferencia} = \frac{G}{1+GH}$$

Así, de manera inicial

$$\text{Función de transferencia} = \frac{200\,000}{1+200\,000\times 0.1} = 9.9995$$

El cambio en la función de transferencia significa que la función de transferencia para el amplificador es de 180 000. Por tanto, la nueva función de transferencia está dada por

$$\text{Función de transferencia} = \frac{180\,000}{1+180\,000\times 0.1} = 9.9994$$

El cambio en la función de transferencia global es 0.0001 y, por lo tanto, es un cambio porcentual de 0.01%. Así, al usar el amplificador sin realimentación se tendría un cambio de 10% en la función de transferencia; con realimentación este cambio es de 0.01%.

Estabilidad de los sistemas de control

En términos mecánicos se dice que un sistema está en equilibrio estable, si cuando se le da un empujón, éste regresa a su posición original cuando se deja de empujar. Un ejemplo de esta situación es una bola en reposo sobre un plato esférico (figura 1.36). Cuando la bola se empuja, ésta se mueve hacia un lado del plato, pero cuando se deja de empujar, regresa pronto a su posición de reposo al centro del plato. Sin embargo, la posición sería inestable si la bola estuviera en reposo sobre la parte exterior del plato si éste se voltea, cualquier ligero empujón causa que la bola ruede y no regrese a su posición original cuando se deja de empujar.

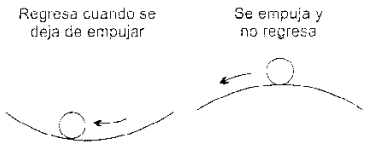


Figura 1.36 *a)* Estable, *b)* inestable

En general, se dice que un sistema es *estable* si cuando está sujeto a una entrada o perturbación acotada entonces la salida es acotada. Una entrada o salida acotada es la que tiene una magnitud finita. Así, en el caso de la bola, la entrada es al inicio cero, seguido de un empujón que no continúa en forma indefinida sino que cesa después de un tiempo. La salida en la condición estable es tal que el empujón causa el movimiento de la bola y que se desplace de su posición de reposo, pero eventualmente el movimiento de la bola cesa y el desplaza-

miento no continúa incrementándose o cambiando. En la condición inestable, el desplazamiento de la salida se va incrementando, es decir, una entrada de magnitud finita puede producir una salida que crece sin límite.

La condición para estabilidad también se puede expresar como que un sistema es estable si al excitarlo con un impulso la salida regresa eventualmente a cero.

Los sistemas de control en lazo abierto son inherentemente estables. Una entrada finita produce una salida finita y que en forma indefinida no cambia con el tiempo. Al incrementar la función de transferencia de un elemento en tales sistemas no tiene efecto en la estabilidad del propio sistema. Así, para un sistema en lazo abierto denominado máquina de barras de chocolate, el insertar la moneda apropiada dará como resultado una barra de chocolate, no continuará dando barras de chocolate de manera indefinida. Al cambiar el tipo de barra, el costo de cada barra no tiene efecto sobre la estabilidad del sistema.

No obstante, los sistemas en lazo cerrado pueden mostrar inestabilidad, que se puede presentar como resultado de tiempos de retardo que ocurren entre el cambio en la variable y la señal de realimentación que resulta de la respuesta del sistema. Un ejemplo es el sistema de control para un brazo robótico, o la mano de un borracho: levantar una tasa de café. La mano se mueve hacia la tasa de café y se supone que vira hacia la derecha de la trayectoria requerida. Al darse cuenta de esta desviación se envía una señal a la mano para iniciar el movimiento a la izquierda. Esta señal continúa en la situación ideal hasta que la mano alcanza la trayectoria requerida. Sin embargo, si hay tiempos de retardo en el sistema, la acción puede continuar por un periodo prolongado y la mano puede sobrepasar la trayectoria requerida antes de que el sistema reaccione. Entonces la mano está muy alejada a la izquierda. Se envía entonces una señal para que la mano se mueva a la derecha. Una vez más, debido a los tiempos de retardo la mano sobrepasa la trayectoria requerida y termina ahora a la derecha de la posición requerida. El ciclo entero se puede repetir dirigiéndose la mano hacia adelante o hacia atrás, de un lado a otro, de la trayectoria requerida. De esta manera, una perturbación inicial puede producir una situación inestable. La inestabilidad depende de la función de transferencia de la trayectoria directa, puesto que un valor grande para ésta resultaría en un gran movimiento de la mano durante el tiempo de retardo.

Otro ejemplo de inestabilidad se puede presentar cuando una persona para bañarse ajusta en forma manual la temperatura del agua mediante una llave mezcladora, la cual permite determinar las cantidades relativas de agua caliente y fría. Suponga que al principio el agua está muy fría. Entonces se incrementa el elemento agua caliente. Sin embargo, existe un tiempo de retardo antes de que el agua caliente alcance la salida de la regadera. De este modo, si la persona no espera y sólo responde a la temperatura del agua, continuará incrementando el elemento agua caliente. El resultado será que cuando el agua muy caliente alcance la salida de la regadera se calentará muy

rápido. La persona entonces incrementa el elemento agua fría. Una vez más, debido al tiempo de retardo que transcurre antes de que el agua se enfríe a la salida de la regadera, la persona continuará incrementando el elemento agua fría. El resultado será que cuando el agua fría alcance la salida de la regadera se enfriará muy rápido. Así, el ciclo se repite con el resultado de que la temperatura del agua en la salida de la regadera oscilará ampliamente.

Lo anterior es sólo una consideración superficial de estabilidad, un estudio más detallado aparece en el capítulo 6.

Lazo cerrado contra lazo abierto

Las ventajas de tener una trayectoria de realimentación y, por lo tanto, un sistema en lazo cerrado en lugar de un sistema en lazo abierto se pueden resumir de la manera siguiente:

1. Más exacto en la igualación de los valores real y requerido para la variable.
2. Menos sensible a las perturbaciones.
3. Menos sensible a cambios en las características de los componentes.
4. La velocidad de respuesta se incrementa y, por lo tanto, el ancho de banda es mayor, es decir, el intervalo de frecuencias en los que el sistema responderá.

Pero hay algunas desventajas:

1. Hay una pérdida en la ganancia en cuanto a que la función de transferencia de un sistema en lazo abierto, se reduce de G a $G/(1 + GH)$ por una trayectoria de realimentación con una función de transferencia H.
2. Existe una gran posibilidad de inestabilidad
3. El sistema es más complejo y, por lo tanto, no sólo más caro, sino más propenso a descomposturas.

Problemas

1. Explicar la diferencia entre los sistemas de control en lazo abierto y lazo cerrado.
2. Establecer cuáles de los siguientes sistemas de control son en lazo abierto o en lazo cerrado y dar las razones de sus aseveraciones:
   a) Una tetera eléctrica que se apaga cuando el agua hierve.
   b) Un refrigerador.
   c) Una hornilla eléctrica sin termostato.
3. Los semáforos en un cruce de calles puede ser un sistema de control en lazo abierto o en lazo cerrado. Explicar cómo diferirían los sistemas.
4. Dibujar un diagrama de cajas negras donde se muestren los subsistemas de los siguientes sistemas de control en lazo cerrado:
   a) Cámara de exposición automática.
   b) Un horno controlado por un termostato.
   c) Una luz automática enciende cuando se oscurece y se apaga cuando se aclara.

5 Explicar la diferencia entre las estrategias de control de dos posiciones y proporcional.

6 Qué tipo de estrategia de control es probable que se emplee en los siguientes sistemas de control:
a) Un refrigerador doméstico.
b) Un tostador de pan.
c) Levantar una tasa de café.

7 El sistema de control automático para la temperatura de un baño maría consiste en un voltaje de referencia que se alimenta a un amplificador diferencial, el cual tiene a su salida un relevador que conecta o desconecta la alimentación de energía al calefactor inmerso en el líquido. Se tiene una realimentación negativa a través de un sistema de medición que alimenta un voltaje al amplificador diferencial. Esbozar un diagrama de bloques del sistema y explicar cómo se produce la señal de error.

8 Un sistema de medición de temperatura tiene un termómetro que produce un cambio de resistencia de 0.007 Ω /°C conectado a un puente de Wheatstone que produce un cambio de corriente de 20 mA/Ω . ¿Cuál es la función de transferencia global del sistema?

9 Explicar qué significa que un sistema tenga una relación lineal entre la entrada y la salida.

10 La figura 1.37 muestra un sistema para controlar la tasa de flujo de líquido en una tubería.
a) Explicar cómo opera el sistema
b) ¿Cuál será la función de transferencia para el lazo de realimentación si el medidor de flujo tiene una función de transferencia de 2 kPa por m/s y el convertidor de presión a corriente de 1.0 mA por kPa?
c) ¿Cuál es la función de transferencia para la trayectoria directa si el convertidor de corriente a presión tiene una función de transferencia de 6 kPa por mA y la válvula de control de 0.1 m/s por kPa?
d) ¿Cuál será la función de transferencia global del sistema de control?

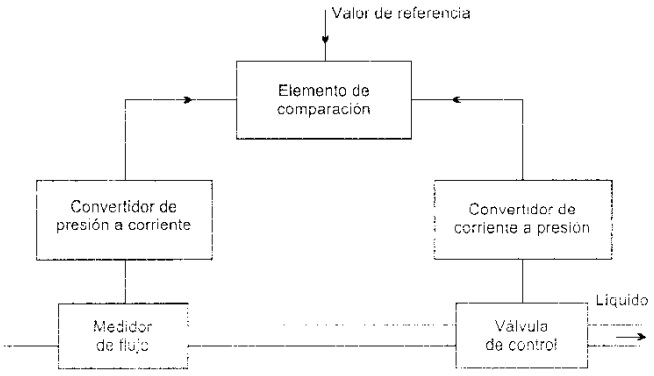


Figura 1.37 Problema 10

11 ¿Cuál será el error en estado estable para un sistema de control de temperatura en lazo abierto que consta de un controlador con una función de transferencia de 1.0 en serie con un calefactor con una función de transferencia de 0.80 °C/V y cuál será el cambio porcentual en el error en estado estable si la función de transferencia del calefactor disminuye en 1%?

12 ¿Cuál será el error en estado estable para un sistema de control de temperatura en lazo cerrado que consta de un controlador con una función de transferencia de 20 en serie con un calefactor con una función de transferencia de 0.80 °C/V y un lazo de realimentación con una función de transferencia de 10 V/°C y cuál será el cambio porcentual en el error en estado estable si la función de transferencia del calefactor disminuye en 1%?

13 Explicar por qué los sistemas realimentados en lazo cerrado son mucho mejores respecto al rechazo a perturbaciones que los sistemas en lazo abierto.

14 Un sistema en lazo abierto tiene una función de transferencia de K. ¿Cuál será el efecto sobre la salida del sistema si la función de transferencia se reduce a $(\frac{1}{2}K)$? ¿Cuál sería el efecto si el sistema tuviera un lazo de realimentación con una función de transferencia de 1?

15 ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de un amplificador que cuenta con un lazo de realimentación?

2 Modelos de sistemas

Introducción

Para analizar los sistemas de control se necesitan *modelos matemáticos* de los elementos que se emplean en dichos sistemas. Estos modelos son ecuaciones que representan la relación entre la entrada y la salida del sistema (vea el capítulo 1). Las bases de cualquier modelo matemático provienen de las leyes físicas fundamentales que gobiernan el comportamiento de un elemento. En este capítulo se considerará una variedad de sistemas, en los que se incluyen ejemplos de los tipos mecánico, térmico y fluídicos.

A partir de una variedad de bloques funcionales, es posible formar sistemas del mismo modo que un niño construye casas, coches o grúas con bloques funcionales de un mecano. Se considera que cada bloque posee una función y propiedades únicas. De este modo, un ejemplo sencillo es un sistema o circuito eléctrico que se puede formar a partir de bloques funcionales que representan el comportamiento de resistores, capacitores e inductores. Se supone que el bloque del resistor tiene sólo la propiedad de resistencia; el capacitor, la de capacitancia, y el inductor, la de inductancia. Al combinar de diferentes maneras estos bloques funcionales es posible formar una variedad de sistemas eléctricos y las relaciones entrada-salida globales que se obtienen para dichos sistemas es a partir de la apropiada combinación de las relaciones causa-efecto de cada bloque funcional. Así se puede obtener un modelo matemático para el sistema. Un sistema formado de esta manera se denomina un sistema de *parámetros concentrados*, debido a que cada parámetro, es decir, propiedad o función, se considera en forma independientemente.

Puesto que existen similitudes en el comportamiento de los bloques funcionales empleados en los sistemas mecánicos, eléctricos, térmicos y de fluídos no se requieren formas diferentes de "bloques funcionales matemáticos" para los diferentes tipos de sistemas. Este capítulo trata los bloques funcionales básicos y su combinación para producir modelos matemáticos para sistemas físicos reales.

Bloques funcionales de sistemas mecánicos

Las formas básicas de bloques funcionales de sistemas mecánicos son resortes, amortiguadores y masas. Los resortes representan la rigidez del sistema; los amortiguadores, las fuerzas de oposición al

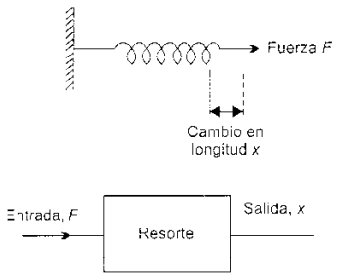


Figura 2.1 Un bloque funcional mecánico: el resorte

movimiento, es decir, efectos de amortiguamiento y fricción, y las masas, la inercia o resistencia a la aceleración. Se puede considerar que todos estos bloques funcionales tienen una fuerza como entrada y un desplazamiento como salida.

La rigidez de un *resorte* se describe mediante la relación entre la fuerza F empleada para estirar o comprimir un resorte y la deformación resultante x, ya sea de estiramiento o compresión (vea la figura 2.1). En el caso de un resorte donde el estiramiento o compresión es proporcional a las fuerzas aplicadas, es decir, un resorte lineal

$$F = kx \qquad [1]$$

donde k es una constante. Cuanto mayor sea el valor de k, mayor será la fuerza para estirar o comprimir al resorte y así la rigidez será mayor. El objeto que aplica la fuerza para estirar el resorte también está sujeto a una fuerza, la fuerza que ejerce el resorte estirado (tercera ley de Newton). Esta fuerza estará en dirección opuesta y de igual magnitud a la fuerza empleada para estirar el resorte, es decir, kx.

El bloque funcional del *amortiguador* representa el tipo de fuerzas que se experimentan cuando se intenta empujar un objeto a través de un fluido o mover el objeto en contra de las fuerzas de fricción. Mientras más rápido se empuje el objeto, mayor serán las fuerzas de oposición. El amortiguador que se emplea para representar pictóricamente estas fuerzas de amortiguamiento que hacen más lento el movimiento de un objeto consta de un pistón que se mueve dentro de un cilindro cerrado (vea la figura 2.2). El movimiento del pistón requiere que el fluido pase de un lado a otro de éste. El flujo produce una fuerza resistiva. En el caso ideal, la fuerza resisitiva o de amortiguamiento F es proporcional a la velocidad v del pistón. Así

$$F = cv$$

donde c es una constante. Cuanto mayor sea el valor de c, mayor es la fuerza de amortiguamiento para una velocidad en particular. Puesto que la velocidad es la razón de cambio del desplazamiento x del pistón, es decir, $v = \mathrm{d}x / \mathrm{d}t$, entonces

$$F = c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad [2]$$

Así, la relación entre el desplazamiento x del pistón, es decir, la salida, y la fuerza como entrada depende de la razón de cambio de la salida.

El bloque funcional de la *masa* (figura 2.3) exhibe la propiedad de que mientras mayor sea la masa, mayor es la fuerza requerida para producir una aceleración específica. La relación entre la fuerza F y la aceleración a es (segunda ley de Newton)

$$F = ma$$

donde la constante de proporcionalidad entre la fuerza y la aceleración es la constante denominada masa m. La aceleración es la razón

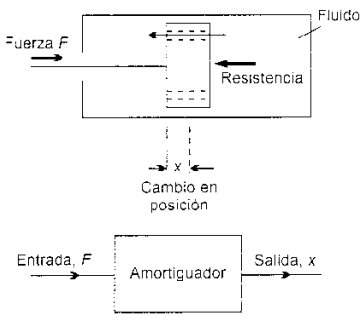


Figura 2.2 Un bloque funcional mecánico: el amortiguador

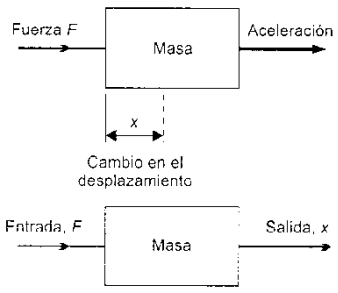


Figura 2.3 Un bloque funcional mecánico: la masa

de cambio de la velocidad, es decir, (dv/dt) y la velocidad v es la razón de cambio del desplazamiento x, es decir, $(v = dx/dt)$. Así

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d(dx/dt)}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad [3]$$

Para estirar un resorte, acelerar la masa y mover el pistón en el amortiguador se requiere energía; no obstante, en el caso del resorte y la masa se obtiene energía de regreso, pero con el amortiguador esto no es posible. Cuando el resorte se estira almacena energía que se libera cuando el resorte recupera su posición original. La energía que se almacena cuando existe un estiramiento x es $\frac{1}{2}kx^2$. Dado que $F = kx$, la energía se puede expresar como

$$E = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k} \quad [4]$$

También hay energía almacenada en la masa cuando se mueve con una velocidad v; esta energía es la que se denomina energía cinética, y se libera cuando la masa deja de moverse

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad [5]$$

Sin embargo, no hay energía almacenada en el amortiguador, ya que éste no regresa a su posición original cuando no hay fuerza de entrada. El amortiguador disipa energía en lugar de almacenarla, la potencia P, disipada depende de la velocidad v, y está dada por

$$P = cv^2 \quad [6]$$

El resorte, el amortiguador y la masa son los bloques funcionales para sistemas mecánicos donde las fuerzas y desplazamientos lineales están relacionados sin rotación alguna. Si hay rotación, entonces los tres bloques funcionales equivalentes son un resorte torsional, un amortiguador rotatorio y el momento de inercia, es decir, la inercia de una masa rotatoria. Con tales bloques funcionales las entradas son pares y las salidas son desplazamientos angulares. Con un *resorte torsional* el desplazamiento angular θ es proporcional al par T. Por lo tanto

$$T = k\theta \quad [7]$$

Con un *amortiguador rotatorio*, un disco gira en un fluido y el par resistivo T es proporcional a la velocidad angular ω y dado que la velocidad angular es la tasa de cambio del desplazamiento angular, es decir, $d\theta/dt$,

$$T = c\omega = c\frac{d\theta}{dt} \quad [8]$$

El bloque funcional del *momento de inercia* posee la propiedad de que mientras mayor sea el momento de inercia I, mayor será el par para producir una aceleración angular α.

$$T = I\,\alpha$$

Así, debido a que la aceleración angular es la razón de cambio de la velocidad angular, es decir, $d\omega/dt$, y la velocidad angular es la razón de cambio del desplazamiento angular, entonces

$$T = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d(d\theta/dt)}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad [9]$$

El resorte torsional y la masa rotatoria almacenan energía, el amortiguador rotatorio sólo la disipa. La energía que almacena un resorte torsional cuando éste se deforma en un desplazamiento angular θ es $\frac{1}{2}k\theta^2$ y, puesto que $T = k\theta$, se puede escribir como

$$E = \frac{1}{2}\frac{T^2}{k} \qquad [10]$$

La energía que almacena una masa rotatoria con una velocidad angular ω es la energía cinética E, donde

$$E = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad [11]$$

La potencia disipada por el amortiguador rotatorio P, cuando gira a una velocidad angular ω es

$$P = c\omega^2 \qquad [12]$$

La tabla 2.1 resume las ecuaciones que definen las características de los bloques funcionales mecánicos cuando hay, en el caso de desplazamientos lineales (denominados traslacionales), una fuerza F de

Tabla 2.1 Características de los bloques funcionales mecánicos

Bloque funcional	*Ecuación descriptiva*	*Energía almacenada/ potencia disipada*
Almacenamiento de energía		
Resorte traslacional	$F = kx$	$E = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$
Resorte torsional	$T = k\theta$	$E = \frac{1}{2}\frac{T^2}{k}$
Masa	$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$	$E = \frac{1}{2}mv^2$
Momento de inercia	$T = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$	$E = \frac{1}{2}I\omega^2$
Disipación de energía		
Amortiguador traslacional	$F = c\frac{dx}{dt}$	$P = cv^2$
Amortiguador rotacional	$T = c\frac{d\theta}{dt}$	$P = c\omega^2$

entrada y un desplazamiento x de salida, y en el caso rotacional un par T y un desplazamiento angular θ.

Formación de un modelo para un sistema mecánico

En esencia, muchos sistemas pueden considerarse una masa, un resorte y un amortiguador dispuestos en la manera que muestra la figura 2.4. Para evaluar la relación entre la fuerza y el desplazamiento del sistema se adopta un procedimiento que sólo considera una masa y las fuerzas que actúan sobre ella. Un diagrama de la masa y las fuerzas que actúan sobre ésta se conocen como *diagrama de cuerpo libre*. Cuando varias fuerzas actúan en forma simultánea sobre un cuerpo, su equivalente resultante se puede encontrar mediante adición vectorial. Si todas las fuerzas actúan sobre la misma línea o líneas paralelas, significa que la fuerza resultante o neta que actúa sobre el cuerpo es la suma algebraica. Así, para la masa en la figura 2.4, si sólo se consideran las fuerzas que actúan sobre ese bloque, la fuerza neta aplicada sobre la masa es la fuerza aplicada F menos la fuerza resultante del estiramiento o compresión del resorte menos la fuerza del amortiguador. De este modo, según las ecuaciones [1] y [2]

$$\text{Fuerza neta aplicada a la masa } m = F - kx - cv$$

$$= F - kx - c\frac{dx}{dt}$$

donde v es la velocidad con la que el pistón en el amortiguador y, por lo tanto, la masa se mueven. Esta fuerza neta es la fuerza aplicada a la masa que hace que ésta se acelere. Así, al emplear la ecuación [3]

$$\text{Fuerza neta aplicada a la masa} = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

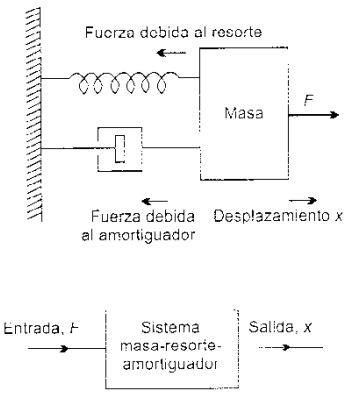


Figura 2.4 Sistema masa-resorte-amortiguador

Por lo tanto

$$F - kx - c\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F \qquad [13]$$

Esta ecuación, denominada ecuación diferencial, describe la relación entre la fuerza F, de entrada al sistema y el desplazamiento x, de salida.

En general esta ecuación se escribe de diferente forma, las constantes m, c y k se reemplazan por otras constantes del sistema. En la ausencia de amortiguamiento una masa m, en el extremo de un resorte oscilaría en forma libre con una frecuencia natural ω_n dada por

$$\omega_n = \sqrt{(k/m)}$$

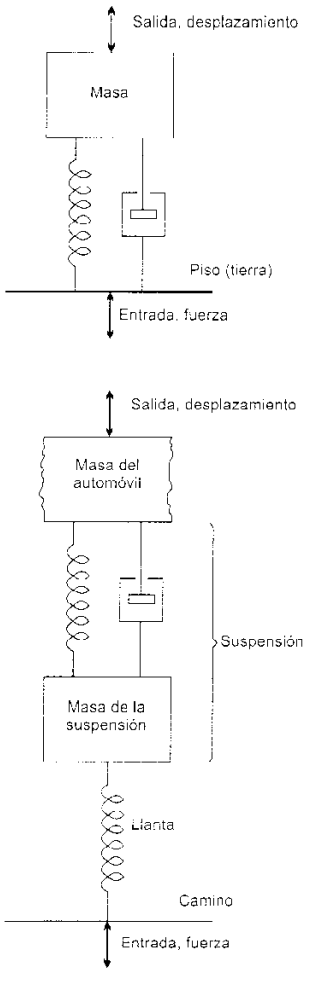


Figura 2.5 Ejemplos de modelos mecánicos: *a*) una máquina montada sobre el piso, *b*) la rueda de un automóvil o camión que se conduce sobre un camino

Sin embargo, el movimiento es amortiguado, se emplea un *factor de amortiguamiento relativo* ζ, para definir el grado de amortiguamiento. Este factor de amortiguamiento relativo (vea el capítulo 3 para una explicación de esta relación) está dado por

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{(mk)}}$$

Así, la ecuación se convierte en

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{dx}{dt} + x = \frac{F}{k} \qquad [14]$$

Existen muchos sistemas que se forman a partir de la combinación de bloques funcionales del resorte, el amortiguador y la masa. La figura 2.5*a* muestra el modelo para una máquina montada sobre el piso, el cual es una base para el estudio de las perturbaciones del piso sobre los desplazamientos de la bancada de la máquina. En la figura 2.5*b* se ilustra el modelo para la rueda y suspensión de un automóvil o camión que se puede usar para estudiar el comportamiento que se puede esperar cuando el vehículo se conduce sobre un camino lleno de baches y, por lo tanto, como una base para diseñar la suspensión del vehículo. El procedimiento que se adopta para el análisis de tales modelos es justamente el mismo que se empleó para el sistema sencillo masa-resorte-amortiguador. Para cada masa en el sistema se dibuja un diagrama de cuerpo libre; dichos diagramas muestran cada masa de manera independiente sólo con las fuerzas que actúan sobre cada una de ellas. Así, para cada masa, la fuerza resultante que actúa sobre ésta se iguala al producto de la masa por la aceleración a la cual está sujeta.

Para sistemas rotacionales se pueden construir modelos similares. Para evaluar la relación entre el par y el desplazamiento angular del sistema el procedimiento que se adopta es considerar sólo un bloque de masa rotacional y sólo los pares que actúan sobre ese cuerpo. Cuando varios pares actúan en forma simultánea sobre un cuerpo, el par resultante equivalente se puede obtener por la adición de dichos pares en la que se tiene en cuenta la dirección de cada uno de ellos. Así, un sistema está formado por un par que se emplea para hacer girar la masa sujeta al extremo de un eje (figura 2.6*a*), y se puede representar por el diagrama de bloques funcionales rotacionales de la figura 2.6*b*. Esta situación es comparable a la que antes se analizó (figura 2.4) para desplazamientos lineales, y se obtiene una ecuación similar a aquellas dadas por las ecuaciones (7) y (8), a saber

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + k\theta = T \qquad [15]$$

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{d\theta}{dt} + \theta = \frac{T}{k} \qquad [16]$$

donde ω_n es la frecuencia natural de rotación y ζ el factor de amortiguamiento relativo para movimiento angular, definidos como

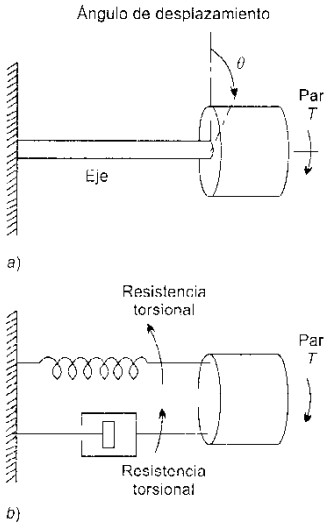


Figura 2.6 *a*) Girar una masa sujeta al extremo de un eje, *b*) modelo de bloques

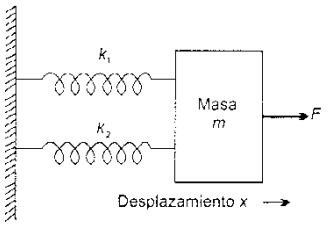


Figura 2.7 Ejemplo 1

$$\omega_n = \sqrt{(k/I)}$$

y

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{(Ik)}}$$

Ejemplo 1

Obtener la ecuación diferencial que describe la relación entre la fuerza de entrada F, y el desplazamiento de salida x, para el sistema de la figura 2.7.

Respuesta

La fuerza neta aplicada a la masa es F menos las fuerzas resistivas generadas por cada resorte. Puesto que éstas existen, mediante la ecuación (1), k_1x y k_2x, entonces

$$\text{Fuerza neta} = F - k_1x - k_2x$$

Debido a que la fuerza neta hace que la masa se acelere, entonces, empleando la ecuación (3)

$$\text{Fuerza neta} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

Por lo tanto

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F - k_1x - k_2x$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + (k_1 + k_2)x = F$$

Ejemplo 2

Obtener la ecuación diferencial que describe el movimiento de la masa m_1, que muestra la figura 2.8 cuando se aplica una fuerza F.

Respuesta

El primer paso es considerar sólo la masa m_1, y las fuerzas que actúan sobre ésta (figura 2.9). Existen las fuerzas generadas por los dos resortes. La fuerza generada por el resorte de la parte inferior es resultado de la deformación del resorte; la cantidad que se deforma es $(x_1 - x_2)$. Así, la fuerza es $k_1(x_1 - x_2)$. La fuerza que genera el resorte de la parte superior se debe a que el resorte se deforma por $(x_2 - x_3)$ y, de este modo, la fuerza es $k_2(x_3 - x_2)$. De esta manera, la fuerza neta que actúa sobre la masa es

$$\text{Fuerza neta} = k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_3 - x_2)$$

Esta fuerza neta logrará que la masa se acelere. Por lo tanto

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t} = k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_3 - x_2)$$

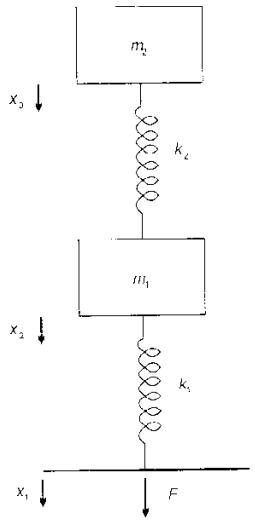


Figura 2.8 Ejemplo 2

Pero la fuerza que causa el estiramiento de resorte de la parte inferior es F. De este modo,

$$F = k_1(x_2 - x_1)$$

Por lo tanto, la ecuación se puede escribir como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k_2(x_3 - x_2) = F$$

Ejemplo 3

Se emplea un motor para hacer girar una carga. Crear un modelo y obtener la ecuación diferencial respectiva.

Respuesta

Ésta es, en esencia, la situación que describe la figura 2.6*a* y el modelo correspondiente, el que se describe en la figura 2.6*b*. La ecuación diferencial es la que describe la ecuación [9], es decir,

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + k\theta = T$$

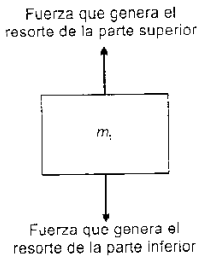


Figura 2.9 Ejemplo 2

Bloques funcionales de sistemas eléctricos

Los bloques funcionales básicos de sistemas eléctricos pasivos son inductores, capacitores y resistores. Para un *inductor*, la diferencia de potencial v, a través de éste en cualquier instante depende de la tasa de cambio de la corriente (di/dt) que fluye por él.

$$v = L\frac{di}{dt} \qquad [17]$$

donde L es la inductancia. La dirección de la diferencia de potencial es la opuesta a la dirección de la diferencia de potencial empleada para hacer fluir la corriente por el inductor; por lo tanto, se denomina fuerza contraelectromotriz. La ecuación se puede rescribir para obtener

$$i = \frac{1}{L}\int v\,dt \qquad [18]$$

Para un *capacitor*, la diferencia de potencial a través de éste depende del cambio de carga q, entre las placas del capacitor en el instante considerado.

$$v = \frac{q}{C} \qquad [19]$$

donde C es la capacitancia. Puesto que la corriente i, hacia el capacitor o desde éste es la tasa a la cual se mueve la carga hacia las placas del capacitor o desde éstas, es decir,

$$i = \frac{dq}{dt}$$

entonces la carga total q, entre las placas del capacitor está dada por

$$q = \int i\,dt$$

y así, la ecuación (19) se puede escribir como

$$v = \frac{1}{C}\int i\,dt \qquad [20]$$

De otro modo, puesto que $v = q / C$, entonces

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt}$$

y así, debido a que $i = dq / dt$, entonces

$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad [21]$$

Para un *resistor*, la diferencia de potencial v, a través de éste en cualquier instante depende de la corriente i, que fluye por él.

$$v = R\,i \qquad [22]$$

donde R es la resistencia.

Tanto el inductor como el capacitor almacenan energía, la cual puede liberarse después. Un resistor no almacena energía, sólo puede disiparla. La energía que almacena un inductor cuando hay una corriente i es

$$E = \tfrac{1}{2} L\,i^2 \qquad [23]$$

La energía que almacena un capacitor cuando hay una diferencia de potencial v, a través de éste es

$$E = \tfrac{1}{2} C\,v^2 \qquad [24]$$

La potencia P, que disipa un resistor cuando hay una diferencia de potencial v, a través de éste es

$$P = \frac{1}{R}v^2 \qquad [25]$$

La tabla 2.2 resume las ecuaciones que definen las características de los bloques funcionales eléctricos cuando *a*) la entrada es corriente y la salida es una diferencia de potencial, y *b*) cuando la entrada es una diferencia de potencial y la salida es una corriente.

Tabla 2.2 Características de los bloques funcionales eléctricos

Bloque funcional	*Ecuación descriptiva*		*Energía almacenada/ potencia disipada*
	a)	*b)*	
Energía almacenada			
Inductor	$v = L\frac{di}{dt}$	$i = \frac{1}{L}\int v\,dt$	$E = \frac{1}{2}Li^2$
Capacitor	$v = \frac{1}{C}\int i\,dt$	$i = C\frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Cv^2$
Energía disipada			
Resistor	$v = Ri$	$i = \frac{v}{R}$	$P = \frac{1}{R}v^2$

Formación de un modelo para un sistema eléctrico

Las ecuaciones que describen cómo se pueden combinar los bloques funcionales eléctricos son las *leyes de Kirchhoff*, las cuales se pueden expresar como:

a) *Ley 1.* La corriente total que fluye hacia una unión es igual a la corriente total que fluye desde esa unión, es decir, la suma algebraica de las corrientes en la unión es cero.

b) *Ley 2.* En un circuito cerrado o malla, la suma algebraica de las diferencias de potencial a través de cada parte del circuito es igual a la fuerza electromotriz (f.e.m.) aplicada.

Una forma conveniente de utilizar la ley 1 es el llamado *análisis de nodos*, puesto que la ley se aplica a cada uno de los nodos principales de un circuito; un nodo es un punto de unión o conexión entre bloques funcionales o elementos del circuito y un nodo principal es aquel en el que se encuentran tres o más ramas del circuito. Un modo conveniente de utilizar la ley 2 es el llamado *análisis de mallas*, dado que la ley se aplica a cada una de la mallas; una malla es una trayectoria cerrada que no contiene ninguna otra trayectoria cerrada.

Para ilustrar el uso de estos dos métodos de análisis para generar relaciones funcionales, considere el circuito que muestra la figura 2.10. En este ejemplo ilustrativo todos los componentes son resistores. Con el análisis de nodos se elige un nodo principal, punto A de la figura, cuyo voltaje está dado por un valor v_A con referencia a otro nodo principal que se haya elegido como referencia. En este caso conviene elegir al nodo B como la referencia. Así, se consideran todas las corrientes que entran y salen del nodo A, y entonces, de acuerdo con la primera ley de Kirchhoff,

$$i_1 = i_2 + i_3$$

La corriente que pasa por R_1 es i_1, y puesto que la diferencia de potencial a través de R_1 es $(v - v_A)$, entonces

$$i_1 R_1 = v - v_A$$

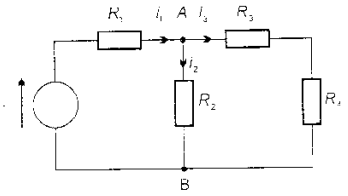


Figura 2.10 Circuito para ilustrar el análisis de nodos

La corriente que pasa por R_2 es i_2 y, dado que la diferencia de potencial a través de R_2 es v_A, entonces

$$i_2 R_2 = v_A$$

La corriente i_3 pasa por R_3 en serie con R_4 y hay una diferencia de potencial de v_A a través de la combinación. Por lo tanto,

$$i_3(R_3 + R_4) = v_A$$

Así, al igualar las corrientes, se obtiene

$$\frac{v - v_A}{R_1} = \frac{v_A}{R_2} + \frac{v_A}{R_3 + R_4}$$

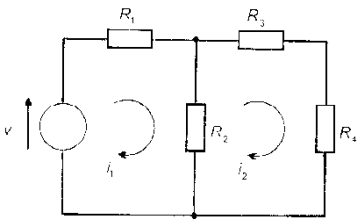


Figura 2.11 Circuito para ilustrar el análisis de mallas

Para ilustrar el análisis de mallas para el circuito que representa la figura 2.10, a menudo conviene suponer que hay corrientes que circulan en cada una de la mallas en la forma que muestra la figura 2.11. Entonces se aplica la segunda ley de Kirchhoff en cada malla. De este modo, para la malla en la que circula la corriente i_1, puesto que la corriente que pasa por R_1 es i_1 y por R_2, $(i_1 - i_2)$, entonces

$$v - i_1 R_1 + (i_1 - i_2)R_2$$

$$v = i_1(R_1 + R_2) - i_2 R_2$$

De modo similar, para la malla en la que circula i_2, puesto que no existe fuente de f.e.m., entonces

$$0 = i_2 R_3 + i_2 R_4 + (i_2 - i_1)R_2$$

Al reordenar la ecuación, se obtiene

$$i_2(R_3 + R_4 + R_2) = i_1 R_2$$

Por lo tanto, al sustituir i_2, a partir de esta última ecuación, en la ecuación de la primera malla se tiene

$$v = i_1(R_1 + R_2) - \frac{i_1 R_2^2}{R_3 + R_4 + R_2}$$

$$v = \frac{i_1(R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_2 R_4)}{R_3 + R_4 + R_2}$$

En general, cuando el número de nodos en un circuito es menor que el número de mallas es más sencillo emplear el análisis de nodos.

Un sistema eléctrico sencillo consta de un resistor y un capacitor en serie, como muestra la figura 2.12. Al aplicar la segunda ley de Kirchhoff a la malla del circuito resulta

$$v = v_R + v_C$$

donde v_R es la diferencia de potencial a través del resistor y v_C, la diferencia de potencial a través del capacitor. Puesto que el circuito sólo tiene una malla, la corriente que pasa por todos los elementos

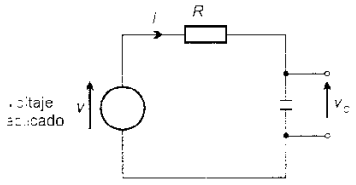


Figura 2.12 Sistema resistor-capacitor

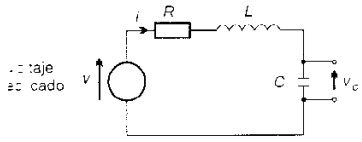


Figura 2.13 Sistema resistor-inductor-capacitor

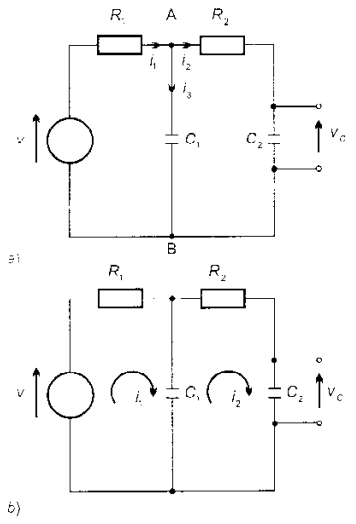


Figura 2.14 *a*) análisis de nodos, *b*) análisis de mallas

del circuito será la misma, i. Si la salida del circuito es la diferencia de potencial a través del capacitor, v_C, entonces, de acuerdo con las ecuaciones [21] y [22], $v_R = iR$ e $i = C(\mathrm{d}v_C / \mathrm{d}t)$,

$$v = iR + v_C$$

$$v = RC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + v_C \qquad [26]$$

Esta ecuación establece la relación entre la salida v_C y la entrada v.

La figura 2.13 muestra un sistema resistor-inductor-capacitor. Al aplicar la segunda ley de Kirchhoff a la malla de este circuito

$$v = v_R + v_L + v_C$$

donde v_R, v_L y v_C son las diferencias de potencial a través del resistor, inductor y capacitor, respectivamente. Puesto que sólo existe una malla, la corriente i será la misma para todos los elementos del circuito. Si la salida del circuito es la diferencia de potencial a través del capacitor v_C, entonces, de acuerdo con las ecuaciones [21] y [17], $v_R = iR$ y $v_L = L(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t)$

$$v = iR + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + v_C$$

Pero, de acuerdo con la ecuación [22]

$$i = C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}$$

De este modo

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}v_C / \mathrm{d}t)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}^2 v_C}{\mathrm{d}t^2}$$

Por lo tanto

$$v = RC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2 v_C}{\mathrm{d}t^2} + v_C \qquad [27]$$

La figura 2.14 muestra un circuito eléctrico con dos mallas. Primero se aplica el análisis de nodos para determinar la relación entre la diferencia de potencial a través del capacitor v_C y el voltaje de entrada v. El punto A de la figura 2.14*a* se elige como un nodo con un potencial v_A en relación al nodo B. Para el nodo A

$$i_1 = i_2 + i_3 \qquad [28]$$

La diferencia de potencial a través de R_1 es $(v \quad v_A)$, de esta manera

$$i_1 R_1 = v - v_A$$

La diferencia de potencial a través de C_1 es v_A, por lo tanto, la ecuación [21] da por resultado

$$i_3 = C_1 \frac{dv_A}{dt}$$

La corriente i_2 produce un aumento en la diferencia de potencial v_C a través de C_2, por lo tanto, la ecuación [21] da

$$i_2 = C_2 \frac{dv_C}{dt}$$

Por lo que la condición para las corrientes en el nodo A, ecuación [28], se convierte en

$$\frac{v - v_A}{R_1} = C_2 \frac{dv_C}{dt} + C_1 \frac{dv_A}{dt} \qquad [29]$$

La diferencia de potencial a través de la combinación en serie de R_2 y C_2 es v_A, por lo tanto

$$v_A = i_2 R_2 + v_C$$

$$v_A = R_2 C_2 \frac{dv_C}{dt} + v_C$$

Al diferenciar esta ecuación se obtiene

$$\frac{dv_A}{dt} = R_2 C_2 \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{dv_C}{dt}$$

Por lo tanto, al sustituir v_A y dv_A/dt en la ecuación [29], da por resultado

$$\frac{v}{R_1} - \frac{R_2 C_2}{R_1} \frac{dv_C}{dt} - \frac{v_C}{R_1} = C_2 \frac{dv_C}{dt} + R_2 C_2 C_1 \frac{d^2 v_C}{dt^2} + C_1 \frac{dv_C}{dt}$$

Por lo tanto

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \left(\frac{R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right) \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} v_C = \frac{v}{R_1 R_2 C_1 C_2} \qquad [30]$$

La ecuación anterior también se puede obtener mediante el análisis de mallas del circuito, como en la figura 2.14*b*. Para la malla con corriente i_1, la segunda ley de Kirchhoff da por resultado

$$v = i_1 R_1 + \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2)\, dt$$

Esta ecuación se puede reordenar para obtener

$$v = i_1 R_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1\, dt - \frac{1}{C_2} \int i_2\, dt \qquad [31]$$

Para la malla en la que circula la corriente i_2, la segunda ley de Kirchhoff da por resultado

$$0 = i_2 R_2 + v_C + \frac{1}{C_1} \int (i_2 - i_1)\, dt$$

Esta ecuación se puede reordenar para obtener

$$0 = i_2 R_2 + v_C + \frac{1}{C_1}\int i_2\,dt - \frac{1}{C_1}\int i_1\,dt \qquad [32]$$

Por lo tanto

$$i_2 = C_2\frac{dv_C}{dt}$$

y

$$v_C = \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt$$

entonces, la ecuación (32) se puede escribir como

$$0 = R_2C_2\frac{dv_C}{dt} + v_C + \frac{C_2v_C}{C_1} - \frac{1}{C_1}\int i_1\,dt$$

Al diferenciar esta ecuación se obtiene

$$0 = R_2C_2\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{dv_C}{dt} + \frac{C_2}{C_1}\frac{dv_C}{dt} - \frac{i_1}{C_1}$$

Por lo tanto

$$i_1 = R_2C_2C_1\frac{d^2v_C}{dt^2} + (C_1 + C_2)\frac{dv_C}{dt}$$

Con esta última ecuación, al sustituir i_1 en la ecuación (31) da

$$v = R_1R_2C_2C_1\frac{d^2v_C}{dt^2} + R_1(C_1 - C_2)\frac{dv_C}{dt} + R_2C_2\frac{dv_C}{dt} + \frac{(C_1 + C_2)}{C_1}v_C - \frac{1}{C_1}\int i_2\,dt$$

Pero

$$v_C = \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt$$

Por lo tanto, al reordenar, esta ecuación se convierte en

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \left(\frac{R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2}{R_1R_2C_1C_2}\right)\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}v_C = \frac{v}{R_1R_2C_1C_2}$$

la cual es idéntica a la ecuación (30) que se obtuvo mediante el análisis de nodos.

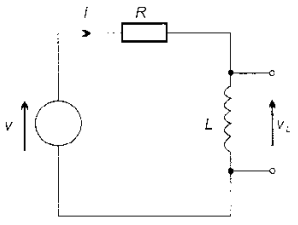


Figura 2.15 Ejemplo 4

Ejemplo 4

Obtener la relación entre la salida, la diferencia de potencial a través del inductor, v_L, y la entrada v, para el circuito que muestra la figura 2.15.

Respuesta

Al aplicar la segunda ley de Kirchhoff a la malla del circuito, se tiene entonces

$$v = v_R + v_L$$

donde v_R es la diferencia de potencial a través del resistor R y v_L la diferencia de potencial a través del inductor. De acuerdo con la ecuación [31], $v_R = iR$, entonces

$$v = iR + v_L$$

De acuerdo con la ecuación [18], se tiene

$$i = \frac{1}{L}\int v_L \, dt$$

entonces

$$v = \frac{R}{L}\int v_L \, dt + v_L$$

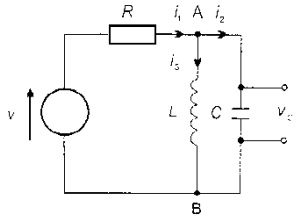


Figura 2.16 Ejemplo 5

Ejemplo 5

Obtener la relación entre la salida, la diferencia de potencial a través del capacitor C de v_C, y la entrada v para el circuito que muestra la figura 2.16.

Respuesta

Al emplear el análisis de nodos, el nodo B se elige como nodo de referencia y el nodo A tendrá una diferencia de potencial v_A con referencia a B. Si al nodo A se aplica la ley 1 de Kirchhoff da por resultado

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Pero

$$i_1 = \frac{v - v_A}{R}$$

$$i_2 = \frac{1}{L}\int v_A \, dt$$

$$i_3 = C\frac{dv_A}{dt}$$

Por lo tanto

$$\frac{v - v_A}{R} = \frac{1}{L}\int v_A \, dt + C\frac{dv_A}{dt}$$

Pero $v_C = v_A$. Por lo tanto, al reordenar se obtiene,

$$v = RC\frac{dv_C}{dt} + v_C + \frac{R}{L}\int v_C \, dt \qquad [33]$$

La respuesta también se puede obtener mediante el análisis de mallas (figura 2.17). Así, para la malla en la que circula la corriente i_1, se tiene

$$v = R\,i_1 + L\frac{d(i_1 - i_2)}{dt} \qquad [34]$$

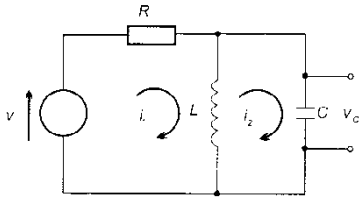


Figura 2.17 Ejemplo 5

Para la malla en la que circula la corriente i_2

$$0 = v_C + L\frac{d(i_2 - i_1)}{dt} \qquad [35]$$

Por lo tanto

$$v_C = -L\frac{d(i_2 - i_1)}{dt} = L\frac{d(i_1 - i_2)}{dt} \qquad [36]$$

Así, la ecuación (34) se convierte en

$$v = R\,i_1 + v_C \qquad [37]$$

Al integrar la ecuación (36) se obtiene

$$\int v_C\,dt = -L(i_2 - i_1)$$

Pero

$$i_2 = C\frac{dv_C}{dt}$$

Por lo tanto

$$\int v_C\,dt = -LC\frac{dv_C}{dt} + Li_1$$

y así

$$i_1 = \frac{1}{L}\int v_C\,dt + C\frac{dv_C}{dt}$$

De este modo, al sustituir i_1 en la ecuación (37)

$$v = \frac{R}{L}\int v_C\,dt + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C$$

la cual es la misma que la ecuación (35) que se obtuvo mediante el análisis de nodos.

Analogías eléctricas y mecánicas

Los bloques funcionales para sistemas eléctricos y mecánicos tienen muchas similitudes. Por ejemplo, el resistor eléctrico no almacena energía sino que la disipa, siendo i la corriente que pasa por el resistor y que se expresa como

$$i = \frac{v}{R}$$

donde R es una constante, y la potencia P disipada está dada por

$$P = \frac{v^2}{R}$$

La analogía mecánica del resistor es el amortiguador. Este elemento tampoco almacena energía, la disipa; la relación entre la fuerza F y la velocidad v, está dada por

$$F = c\,v$$

Tabla 2.3 Bloques funcionales análogos eléctricos y mecánicos

Bloque funcional	*Ecuación descriptiva*	*Energía/ potencia*	*CA**
Almacenamiento de energía			
Inductor	$i = \frac{1}{L}\int v\,dt$	$E = \frac{1}{2}Li^2$	$\frac{1}{L}$
Resorte traslacional	$F = kx = k\int v\,dt$	$E = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$	k
Resorte torsional	$T = k\theta = k\int \omega\,dt$	$E = \frac{1}{2}\frac{T^2}{k}$	k
Capacitor	$i = C\frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Cv^2$	C
Masa	$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2}mv^2$	m
Momento de inercia	$T = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = I\frac{d\omega}{dt}$	$E = \frac{1}{2}I\omega^2$	I
Disipación de energía			
Resistor	$i = \frac{v}{R}$	$P = \frac{1}{R}v^2$	$\frac{1}{R}$
Amortiguador traslacional	$F = cv$	$P = cv^2$	c
Amortiguador rotacional	$T = c\omega$	$P = c\omega^2$	c

* Constante análoga.

donde c es una constante, y P, la potencia disipada está dada por

$$P = cv^2$$

Ambos conjuntos de ecuaciones presentan formas similares. Al compararlas, si se toma la corriente como una cantidad análoga a la fuerza, entonces la diferencia de potencial es análoga a la velocidad y la constante c del amortiguador es el recíproco de la resistencia, es decir, $(1/R)$. Estas analogías entre corriente y fuerza, diferencia de potencial y velocidad se mantienen para otros bloques funcionales. La tabla 2.3 presenta las ecuaciones análogas.

Considere la analogía eléctrica para dos resortes en serie, como muestra la figura 2.18*a*. Cuando la fuerza F se aplica al arreglo, entonces la fuerza que actúa sobre cada resorte es la misma, a saber F. El equivalente eléctrico de la fuerza es la corriente i y los equivalentes de los resortes son inductores. Puesto que cada uno de los resortes experimenta la misma fuerza, entonces deberá fluir la misma corriente por cada uno de los inductores. Esto sólo puede ser si los inductores equivalentes están en serie (figura 2.18*b*). Para el resorte 1 el equivalente de k_1 es una inductancia de $1/L_1$; para el resorte 2, k_2 es equivalente a $1/L_2$.

Para dos resortes en paralelo (figura 2.19*a*), la fuerza que experimenta cada uno de ellos debe ser igual a la fuerza total F, es decir,

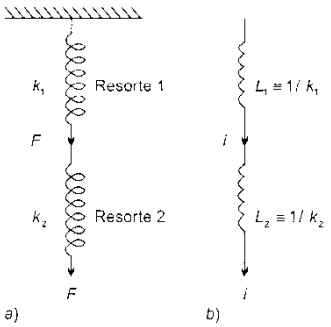


Figura 2.18 Analogías mecánica y eléctrica

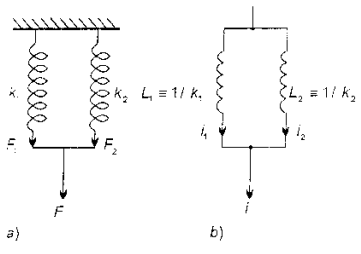


Figura 2.19 Analogías mecánica y eléctrica

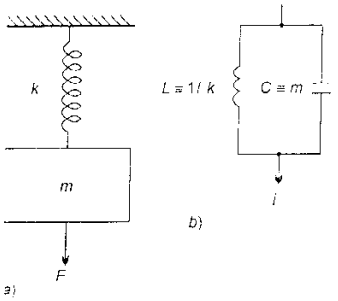


Figura 2.20 Analogías mecánica y eléctrica

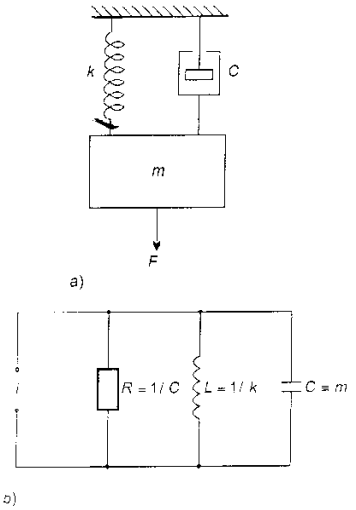


Figura 2.21 Analogías mecánica y eléctrica

$$F = F_1 + F_2$$

La equivalencia de esto es

$$i = i_1 + i_2$$

De este modo, la corriente total debe ser igual a la suma de las corrientes que fluyen por los inductores equivalentes. Esto sólo puede ser cuando los inductores están en paralelo (figura 2.19*b*). Para el resorte 1, el equivalente de k_1 es una inductancia de $1 / L_1$, para el resorte 2 k_2 es equivalente a $1 / L_2$.

La figura 2.20*a* muestra un sistema mecánico formado por un resorte y una masa. La fuerza neta que actúa sobre la masa es

Fuerza neta que actúa sobre la masa
$= F$ – Fuerza neta generada por el resorte

De este modo

F = fuerza neta generada por el resorte
+ fuerza neta que actúa sobre la masa

Esto tiene un equivalente eléctrico, puesto que un inductor es equivalente a un resorte y un capacitor a una masa, de

i = corriente que pasa por el inductor
+ corriente que pasa por el capacitor

Esta situación sólo se da si los componentes están en paralelo. Así, la analogía eléctrica es como muestra la figura 2.20*b*.

La figura 2.21 ilustra un sistema mecánico formado por un resorte, un amortiguador y una masa. La fuerza neta que actúa sobre la masa es

Fuerza neta que actúa sobre la masa = F
– fuerza generada por el resorte
– fuerza generada por el amortiguador

Así

F = fuerza neta que actúa sobre la masa
+ fuerza generada por el resorte
+ fuerza generada por el amortiguador

Este sistema tiene un equivalente eléctrico, puesto que un inductor es equivalente a un resorte, un capacitor a una masa y un resistor a un amortiguador, de

i = corriente que pasa por el capacitor
+ corriente que pasa por el inductor
+ corriente que pasa por el resistor

Esto sólo puede ser si los componentes están en paralelo. De este modo, la analogía eléctrica se muestra en la figura 2.21*b*.

La analogía entre corriente y fuerza es una de las más utilizadas. No obstante, se pueden establecer otras analogías entre diferencia de potencial y fuerza.

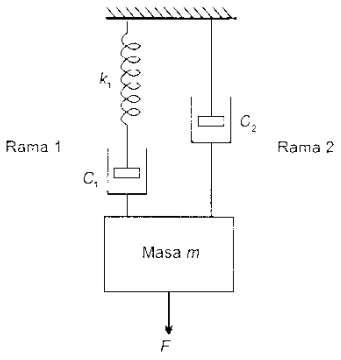


Figura 2.22 Ejemplo 6

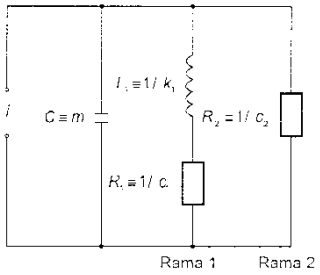


Figura 2.23 Ejemplo 6

Ejemplo 6

Dibujar el circuito eléctrico equivalente al sistema mecánico que ilustra la figura 2.22.

Respuesta

Sobre el resorte k_1 y el amortiguador c_1 actúa la misma fuerza, de modo que en el circuito eléctrico equivalente debe fluir la misma corriente por los componentes equivalentes, un inductor y un resistor. La fuerza neta que actúa sobre la masa es

Fuerza neta que actúa sobre la masa = F
− fuerza generada por la rama 1
− fuerza generada por la rama 2

Por lo tanto

F = fuerza neta que actúa sobre la masa
+ fuerza generada por la rama 1
+ fuerza generada por la rama 2

El equivalente eléctrico de la masa es un capacitor. El componente en la rama 2 es un amortiguador y su equivalente eléctrico es un resistor. Por lo tanto

i – corriente que pasa por el capacitor
= corriente que pasa por la rama 1
= corriente que pasa por el resistor 2

El capacitor, la rama 1 y el resistor 2 deben estar en paralelo. Por lo tanto, el circuito es como muestra la figura 2.23.

Bloques funcionales de sistemas fluídicos

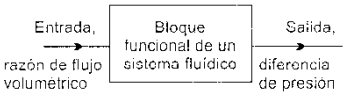


Figura 2.24 Bloque funcional de un sistema fluídico

En sistemas de flujo de fluidos existen tres bloques funcionales, los cuales se pueden considerar equivalentes de la resistencia, la inductancia y la capacitancia. Para estos sistemas (figura 2.24) la entrada, el equivalente de la corriente eléctrica, es la razón de flujo volumétrico q, y la salida, el equivalente de la diferencia de potencial eléctrico, es la diferencia de presiones, $(p_1 - p_2)$. Los sistemas fluídicos se pueden considerar en dos categorías: los *hidráulicos* son aquellos en los que el fluido es un líquido que se considera incompresible y los *neumáticos* son los que su fluido es un gas que puede ser compresible y presenta cambios de densidad.

La *resistencia hidráulica* es la resistencia a fluir que se presenta como resultado de un flujo de líquido a través de válvulas o cambios de diámetro de las tuberías (figura 2.25). La relación entre la razón de flujo volumétrico q del líquido a través de un elemento resistivo y la resultante diferencia de presiones $(p_1 - p_2)$ es

$$p_1 - p_2 = R\,q \qquad [38]$$

donde R es una constante llamada resistencia hidráulica. A mayor resistencia hidráulica mayor es la diferencia de presiones para dar una razón de flujo.

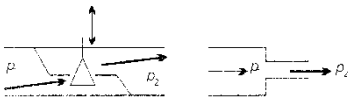


Figura 2.25 Ejemplos de resistencias hidráulicas

Capacitancia hidráulica es el término que se emplea para describir el almacenamiento de energía con el líquido, donde ésta se alma-

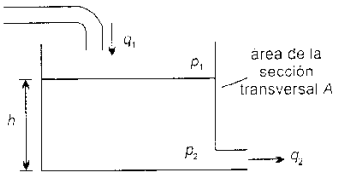


Figura 2.26 Capacitancia hidráulica

cena en forma de energía potencial. La altura de líquido en un contenedor (figura 2.26), que se denomina carga de presión, es una forma de dicho almacenamiento. Para esta capacitancia, la tasa de cambio del volumen V en el contenedor, es decir, dV/dt, es igual a la diferencia entre la razón de flujo q_1 a la que el fluido entra en el contenedor, y la razón de flujo q_2 a la que deja el contenedor.

$$q_1 - q_2 = \frac{dV}{dt}$$

Pero $V = Ah$, donde A es el área de la sección transversal del contenedor y h la altura del fluido en él. Por lo tanto

$$q_1 - q_2 = \frac{d(Ah)}{dt} = A\frac{dh}{dt}$$

Pero la diferencia de presiones entre la entrada y la salida es p, donde

$$p = h\rho g$$

donde ρ es la densidad del líquido y g la aceleración debida a la gravedad. Así,

$$q_1 - q_2 = A\frac{d(p/\rho g)}{dt} = \frac{A}{\rho g}\frac{dp}{dt}$$

si se considera que el líquido es incompresible, es decir, su densidad no cambia con la presión. La capacitancia hidráulica C se define como

$$C = \frac{A}{\rho g} \qquad [39]$$

De este modo,

$$q_1 - q_2 = C\frac{dp}{dt} \qquad [40]$$

Al integrar esta ecuación se obtiene

$$p = \frac{1}{C}\int (q_1 - q_2)\,dt \qquad [41]$$

La *inertancia (inercia) hidráulica* es el equivalente a la inductancia en sistemas eléctricos o a un resorte en sistemas mecánicos. Para acelerar un fluido y así incrementar su velocidad se requiere una fuerza. Considere un bloque de líquido de masa m (figura 2.27). La fuerza neta que actúa sobre el líquido es

$$F_1 - F_2 = p_1A - p_2A = (p_1 - p_2)A$$

donde $(p_1 - p_2)$ es la diferencia de presiones y A es el área de la sección transversal. La fuerza neta propicia que la masa se acelere con una aceleración a, y así

$$(p_1 - p_2)A = ma$$

Pero a es la tasa de cambio de la velocidad dv/dt, por lo tanto

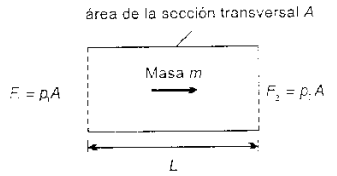


Figura 2.27 Inertancia hidráulica

$$(p_1 - p_2)A = m\frac{dv}{dt}$$

Pero la masa del líquido considerado tiene un volumen AL, donde L es la longitud del bloque de líquido o la distancia entre los dos puntos en el líquido donde se miden las presiones p_1 y p_2. Si el líquido tiene una densidad ρ, entonces $m = AL\rho$, y así

$$(p_1 - p_2)A = AL\rho\frac{dv}{dt}$$

Pero la razón de flujo volumétrico $q = Av$, por lo tanto

$$(p_1 - p_2)A = L\rho\frac{dq}{dt}$$

$$p_1 - p_2 = I\frac{dq}{dt} \qquad [42]$$

donde la inertancia hidráulica I se define como

$$I = \frac{L\rho}{A} \qquad [43]$$

Con sistemas neumáticos los tres bloques funcionales son, al igual que en sistemas hidráulicos, resistencia, capacitancia e inertancia. Sin embargo, los gases difieren de los líquidos en que los primeros son compresibles, es decir, un cambio en la presión causa un cambio en el volumen y, por lo tanto, en la densidad. La *resistencia neumática* R se define en términos de la razón de flujo másico $\dot{m}$ y la diferencia de presiones $(p_1 - p_2)$ como

$$p_1 - p_2 = R\dot{m} \qquad [44]$$

La *capacitancia neumática* C se debe a la compresibilidad del gas, de manera muy parecida a la compresión de un resorte al almacenar energía. Si hay una razón de flujo másico $\dot{m}_1$ que entra al contenedor de volumen V y la razón de flujo másico $\dot{m}_2$ que sale de éste, entonces la razón a la cual está cambiando la masa en el contenedor es

$$\text{Tasa de cambio de la masa en el contenedor} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2$$

Si el gas en el contenedor tiene una densidad ρ, entonces la tasa de cambio de la masa en el contenedor es

$$\text{Tasa de cambio de la masa en el contenedor} = \frac{d(\rho V)}{dt}$$

Pero tanto ρ como V pueden variar con el tiempo. Por lo tanto

$$\text{Tasa de cambio de la masa en el contenedor} = \frac{\rho dV}{dt} + \frac{V d\rho}{dt}$$

Puesto que $(dV/dt) = (dV/dp)(dp/dt)$ y para un gas ideal $pV = mRT$, en consecuencia $p - (m/V)RT = \rho RT$ y así $d\rho/dt = (1/RT)(dp/dt)$, entonces

$$\text{Tasa de cambio de la masa en el contenedor} = \rho \frac{dV}{dp}\frac{dp}{dt} + \frac{V}{RT}\frac{dp}{dt}$$

donde R es la constante de los gases y T, la temperatura, la cual se supone constante en la escala Kelvin. De este modo

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = \left(\rho \frac{dV}{dp} + \frac{V}{RT} \right) \frac{dp}{dt}$$

La capacitancia neumática por el cambio en el volumen del contenedor C_1 se define como

$$C_1 = \rho \frac{dV}{dp} \qquad [45]$$

y la capacitancia neumática debida a la compresibilidad del gas C_2 se define como

$$C_2 = \frac{V}{RT} \qquad [46]$$

Por lo tanto

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = (C_1 + C_2)\frac{dp}{dt} \qquad [47]$$

o bien

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{C_1 + C_2} \int (\dot{m}_1 - \dot{m}_2)\, dt \qquad [48]$$

La *inertancia* (inercia) *neumática* se debe a la caída de presión necesaria para acelerar un bloque de gas. De acuerdo con la segunda ley de Newton

$$\text{Fuerza neta} = \frac{d(mv)}{dt}$$

Puesto que la fuerza es provista por la diferencia de presiones $(p_1 - p_2)$, entonces si A es el área de la sección transversal del bloque de gas que se acelera

$$(p_1 - p_2)A = \frac{d(mv)}{dt}$$

Pero m, la masa del gas que se acelera, es ρLA, donde ρ es la densidad del gas y L la longitud del bloque de gas que se acelera. Pero la razón de flujo volumétrico $q = Av$, donde v es la velocidad. De este modo

$$mv = \rho LA(q/A) = \rho Lq$$

y así

$$(p_1 \quad p_2)A = L \frac{d(\rho q)}{dt}$$

Pero $\dot{m} = \rho q$ y, de este modo

$$p_1 - p_2 = \frac{L}{A}\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\mathrm{d}t}$$

$$p_1 - p_2 = I\frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\mathrm{d}t} \qquad [49]$$

siendo la inertancia neumática

$$I = \frac{L}{A} \qquad [50]$$

La tabla 2.4 muestra las características básicas de los bloques funcionales fluídicos, tanto hidráulicos como neumáticos, y los bloques funcionales eléctricos análogos. Para los sistemas hidráulicos la razón de flujo volumétrico y para sistemas neumáticos la razón de flujo másico son análogas a la corriente eléctrica en sistemas eléctricos.

Tabla 2.4 Bloques funcionales análogos fluídicos y eléctricos

Bloque funcional	*Ecuación descriptiva*	*Energía/ potencia*	*CA**
Almacenamiento de energía			
Inductor	$i = \frac{1}{L}\int v\mathrm{d}t$	$E = \frac{1}{2}Li^2$	$\frac{1}{L}$
Inertancia hidráulica	$q = \frac{1}{L}\int(p_1 - p_2)\mathrm{d}t$	$E = \frac{1}{2}Iq^2$	$\frac{1}{L}$
Inertancia neumática	$\dot{m} = \frac{1}{L}\int(p_1 - p_2)\mathrm{d}t$	$E = \frac{1}{2}I\dot{m}^2$	$\frac{1}{L}$
Capacitor	$i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	$E = \frac{1}{2}Cv^2$	C
Capacitancia hidráulica	$q = C\frac{\mathrm{d}(p_1 - p_2)}{\mathrm{d}t}$	$E = \frac{1}{2}C(p_1 - p_2)^2$	C
Capacitancia neumática	$\dot{m} = C\frac{\mathrm{d}(p_1 - p_2)}{\mathrm{d}t}$	$E = \frac{1}{2}C(p_1 - p_2)^2$	C
Disipación de energía			
Resistor	$i = \frac{v}{R}$	$P = \frac{1}{R}v^2$	$\frac{1}{R}$
Resistencia hidráulica	$q = \frac{(p_1 - p_2)}{R}$	$P = \frac{1}{R}(p_1 - p_2)^2$	$\frac{1}{R}$
Resistencia neumática	$\dot{m} = \frac{(p_1 - p_2)}{R}$	$P = \frac{1}{R}(p_1 - p_2)^2$	$\frac{1}{R}$

* Constante análoga.

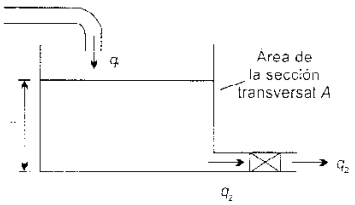


Figura 2.28 Un sistema hidráulico

Tanto para sistemas hidráulicos como neumáticos la diferencia de presiones es análoga a la diferencia de potencial en sistemas eléctricos. Las inertancias y capacitancias hidráulicas y neumáticas son elementos que almacenan energía y la resistencia tanto hidráulica como neumática son disipadores de energía.

Formación de un modelo para un sistema fluídico

La figura 2.28 ilustra un sistema hidráulico sencillo: un líquido entra y sale de un contenedor. Dicho sistema se puede considerar como un capacitor, el líquido en el contenedor, con un resistor, la válvula. La inertancia se puede despreciar puesto que las tasas de cambio de flujo son muy lentas.

Para el capacitor, según la ecuación (40) da por resultado

$$q_1 - q_2 = C\frac{dp}{dt}$$

La razón de flujo q_2 a la cual el líquido sale del contenedor es igual a la razón de flujo a través de la válvula. De este modo, para el resistor, la ecuación (38) da por resultado

$$p = Rq_2$$

La presión se debe a la altura del líquido en el contenedor. Así, al sustituir q_2 en la primera ecuación se obtiene

$$q_1 - \frac{p}{R} = C\frac{dp}{dt}$$

Puesto que $p = h\rho g$, donde ρ es la densidad del líquido y g la aceleración debida a la gravedad, entonces

$$q_1 - \frac{h\rho r}{R} = C\frac{d(h\rho g)}{dt}$$

y debido a que $C = A/\rho g$, entonces

$$q_1 = A\frac{dh}{dt} + \frac{\rho g h}{R} \qquad [51]$$

Esta ecuación describe cómo la altura del líquido en el contenedor depende de la tasa de entrada del líquido en el contenedor.

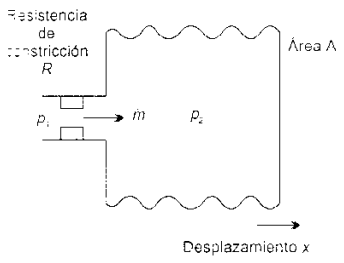


Figura 2.29 Un sistema neumático

Un ejemplo de un sistema neumático sencillo es un fuelle (figura 2.29). La resistencia la proporciona la constricción que restringe la razón de flujo del gas en el interior del fuelle y la capacitancia es provista por el propio fuelle. La inertancia se puede despreciar debido a que los cambios en la razón de flujo son lentos.

La razón de flujo másico $\dot{m}$ en el interior del fuelle está dada por la ecuación (44) como

$$\dot{m} = \frac{p_1 - p_2}{R} \qquad [52]$$

donde p_1 es la presión antes de la constricción y p_2 la presión después de la constricción, es decir, la presión en el fuelle. Todo el gas que fluye hacia el interior del fuelle permanece dentro de éste, al no haber salida en el fuelle.

La capacitancia del fuelle está dada por la ecuación (49) como

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 - (C_1 + C_2)\frac{dp_2}{dt}$$

Pero $\dot{m}_1$ es la razón de flujo másico $\dot{m}$ dada por la ecuación (52) y puesto que no hay salida de gas del fuelle, $\dot{m}_2$ es cero. De este modo, al usar el valor para la razón de flujo másico dada por la ecuación (52),

$$\frac{p_1 - p_2}{R} = (C_1 + C_2)\frac{dp_2}{dt}$$

Por lo tanto

$$p_1 = R(C_1 + C_2)\frac{dp_2}{dt} + p_2 \qquad [53]$$

Esta ecuación describe cómo la presión p_2 en el fuelle varía con el tiempo cuando hay una entrada de presión de p_1.

El fuelle se expande o contrae como resultado de los cambios de presión dentro de éste. Un fuelle es una forma de resorte y se puede escribir para relacionar la fuerza F que causa una expansión o contracción y el resultante desplazamiento x

$$F = kx$$

donde k es la constante de resorte del fuelle. Pero la fuerza F depende de la presión p_2, con $p_2 = F/A$, donde A es el área de la sección transversal del fuelle. De este modo,

$$p_2 A = F = kx$$

por lo tanto, al sustituir p_2 en la ecuación (53) se obtiene

$$p_1 = R(C_1 + C_2)\frac{k}{A}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{A}x \qquad [54]$$

Esta ecuación describe cómo la extensión o contracción del fuelle cambia con el tiempo cuando hay una entrada de presión p_1.

La capacitancia neumática debida al cambio en el volumen del contenedor C_1 está definida por la ecuación (45) como

$$C_1 = \rho\frac{dV}{dp_2}$$

Puesto que $V = Ax$, entonces

$$C_1 = \rho A\frac{dx}{dp_2}$$

Pero para el fuelle $p_2 A = kx$, de este modo

$$C_1 = \rho A \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}(kx / A)} = \frac{\rho A^2}{k} \qquad [55]$$

Ejemplo 7

La figura 2.30 muestra un sistema hidráulico. Obtener las relaciones que describan cómo las alturas del líquido en los contenedores cambian con el tiempo. La inertancia es despreciable.

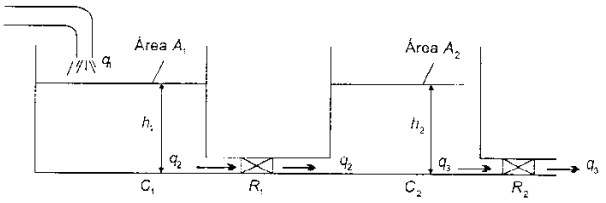


Figura 2.30 Ejemplo 7

Respuesta

El contenedor 1 es un capacitor y, al emplear la ecuación (40)

$$q_1 - q_2 = C_1 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

donde $p = h_1 \rho g$ y $C_1 = A_1 / \rho g$ y de este modo

$$q_1 - q_2 = A_1 \frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} \qquad [56]$$

La razón a la cual sale el líquido del contenedor q_2, es igual a la razón a la que deja la válvula R_1. De esta manera, para el resistor la ecuación (38) da

$$p = R_1 q_2$$

La diferencia de presiones p en los dos lados de la válvula son $h_1 \rho g$ y $h_2 \rho g$. Así

$$(h_1 - h_2)\rho g = R_1 q_2 \qquad [57]$$

Con el valor de q_2 de esta ecuación y al sustituirlo en la ecuación (56) se obtiene

$$q_1 - \frac{(h_1 - h_2)\rho g}{R_1} = A_1 \frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} \qquad [58]$$

Esta ecuación describe cómo la altura del líquido en el contenedor 1 depende de la razón de flujo de entrada.

Para el contenedor 2 se puede obtener un conjunto de ecuaciones similares. Entonces para el capacitor C_2

$$q_2 - q_3 = C_2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

donde $p = h_2 \rho g$ y $C_2 = A_2 / \rho g$, y así

$$q_2 - q_3 = A_2 \frac{dh_2}{dt} \qquad [59]$$

La razón a la que el líquido sale del contenedor q_3 es igual a la razón de flujo a la cual deja la válvula R_2. Así, para el resistor la ecuación (38) da por resultado

$$p = R_2 q_3$$

La diferencia de presiones p en los dos lados de la válvula son $h_2\rho g$ y 0, suponiendo que el líquido sale a la presión atmosférica. Así

$$h_2 \rho g = R_2 q_3 \qquad [60]$$

Al despejar el valor de q_3 de esta ecuación y sustituirlo en la ecuación (59) se obtiene

$$q_2 - \frac{h_2 \rho g}{R_2} = A_2 \frac{dh_2}{dt} \qquad [61]$$

Al sustituir q_2 de la ecuación de la válvula, ecuación (57), da por resultado

$$\frac{(h_1 - h_2)\rho g}{R_1} - \frac{h_2 \rho g}{R_2} = A_2 \frac{dh_2}{dt} \qquad [62]$$

Esta ecuación describe cómo cambia la altura del líquido en el contenedor 2. De esta manera, las ecuaciones (58) y (62) describen las variaciones de altura en los dos contenedores.

Ejemplo 8

La figura 2.31 ilustra un tubo en U que contiene un líquido. Obtener una expresión que indique cómo variará con el tiempo la diferencia de altura cuando se incrementa la presión sobre el líquido en uno de los extremos, y dibujar el diagrama del circuito que sería el sistema eléctrico equivalente al sistema hidráulico.

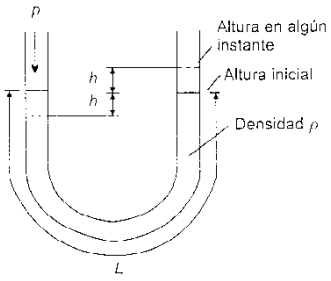


Figura 2.31 Ejemplo 8

Respuesta

Cuando no existe diferencia en las presiones, el líquido en ambos extremos está a la misma altura. Si se presenta una presión p (siendo ésta la cantidad a la cual la presión sobre el líquido en un extremo excede a la que se tiene sobre el líquido en el otro extremo, denominada presión manométrica, cuando el otro extremo está abierto a la atmósfera) entonces se empieza a presentar una diferencia de alturas h entre el líquido en los dos extremos. En cualquier instante la diferencia de presiones p entre los dos extremos debe ser igual a la caída de presión total a través del sistema. Se puede considerar que el sistema tiene inertancia, resistencia y capacitancia y así p es igual a la suma de las caídas de presión debida a cada uno de éstas. La caída de presión debida a la inertancia está dada por la ecuación (42) como

$$\text{Caída de presión} = I \frac{dq}{dt}$$

donde q es la razón de flujo volumétrico del líquido de un extremo al otro. La caída de presión debida a la resistencia está dada por la ecuación (38) como

Caída de presión = Rq

La caída de presión debida a la capacitancia está dada por la ecuación (41) como

$$\text{Caída de presión} = \frac{1}{C}\int q\,dt$$

Puesto que p es igual a la suma de las caídas de presión,

$$p = I\frac{dq}{dt} + Rq + \frac{1}{C}\int q\,dt$$

El volumen del líquido que fluye de un extremo a otro cuando hay una diferencia de alturas de $2h$ es Ah, puesto que la altura de líquido h en un extremo se considera que se ha movido al otro extremo para producir esta diferencia en altura. Así q, la razón a la cual el volumen del líquido se mueve de un extremo a otro, es $d(Ah)/dt$. Por lo tanto

$$p = IA\frac{d^2h}{dt^2} + RA\frac{dh}{dt} + \frac{A}{C}\int dh$$

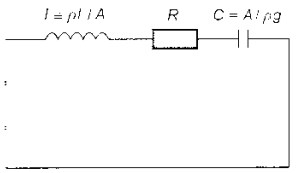


Figura 2.32 Ejemplo 8

Pero la diferencia total en altura entre los dos límites es $2h$. Así, puesto que $I = \rho L/A$ y $C = A/\rho g$

$$p = \rho L\frac{d^2h}{dt^2} + RA\frac{dh}{dt} + 2h\rho g$$

El sistema tiene caídas de presión debidas a la inertancia, resistencia y capacitancia, las cuales se suman. El equivalente eléctrico de esto es la adición de las diferencias de potencial a través de un inductor, un resistor y un capacitor. Esto significa que los tres componentes están en serie. El circuito es como muestra la figura 2.32.

Bloques funcionales de sistemas térmicos

Sólo existen dos bloques funcionales básicos para sistemas térmicos: resistencia y capacitancia. Sólo hay flujo de calor neto entre dos puntos si hay una diferencia de temperaturas entre ellos. El equivalente eléctrico de esto es que fluye una corriente neta i entre dos puntos si hay una diferencia de potencial v entre dichos puntos; la relación entre la corriente y la diferencia de potencial es

$$i = \frac{v}{R}$$

Se puede utilizar una relación similar para definir la *resistencia térmica* R. Si q es la razón de flujo de calor y $(T_1 - T_2)$, la diferencia de temperatura, entonces

$$q = \frac{(T_2 - T_1)}{R} \qquad [63]$$

El valor de la resistencia depende del modo en el que se transfiere el calor. En la conducción a través de un sólido, para conducción unidireccional

$$q = Ak\frac{(T_1 - T_2)}{L}$$

donde A es el área de la sección transversal del material a través del cual se conduce el calor y L, la longitud del material entre los puntos cuyas temperaturas son T_1 y T_2. La conductividad térmica es k. Por lo tanto, al comparar esta ecuación con la ecuación (63) se obtiene

$$R = \frac{L}{Ak} \qquad [64]$$

Cuando la transferencia de calor es por convección, como se lleva a cabo en líquidos y gases, entonces

$$q = Ah(T_2 - T_1)$$

donde A es el área superficial a través de la cual existe la diferencia de temperaturas y h el coeficiente de transferencia de calor. De este modo, al comparar esta ecuación con la ecuación (63) se obtiene

$$R = \frac{1}{Ah} \qquad [65]$$

La *capacitancia térmica* es una medida del almacenamiento de energía interna en un sistema. De este modo, si la razón de flujo de calor en el interior de un sistema es q_1 y la razón de flujo de calor que sale es q_2, entonces

$$\text{Tasa de cambio de la energía interna} = q_1 - q_2$$

Un incremento en la energía interna significa un incremento en la temperatura. Por lo tanto

$$\text{Cambio en la energía interna} = mc \times \text{cambio en la temperatura}$$

donde m es la masa y c la capacidad calorífica específica, entonces

$$\text{Tasa de cambio en la energía interna} = mc \times \text{tasa de cambio en la temperatura}$$

De este modo

$$q_1 - q_2 = mc\frac{dT}{dt}$$

donde dT/dt es la tasa de cambio en la temperatura. Esta ecuación se puede escribir como

$$q_1 - q_2 = C\frac{dT}{dt} \qquad [66]$$

donde C es la capacitancia térmica.

$$C = mc \qquad [67]$$

La tabla 2.5 presenta una comparación de los bloques funcionales térmicos y eléctricos. No existe equivalente térmico al inductor eléctrico. Los resistores eléctricos disipan energía, transformándola en calor. La resistencia térmica no se puede describir como un disipa-

Tabla 2.5 Bloques funcionales análogos térmicos y eléctricos

Bloque funcional	*Ecuación descriptiva*	*Energía/ potencia*	*CA**
Almacenamiento de energía			
Capacitor	$i = C\frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Cv^2$	C
Capacitancia térmica	$q_1 - q_2 = C\frac{dT}{dt}$	$E = CT$	C
Resistor	$i = \frac{v}{R}$	$P = \frac{1}{R}v^2$	$\frac{1}{R}$
Resistencia térmica	$q = \frac{(T_1 - T_2)}{R}$	$P = q = \frac{(T_1 - T_2)}{R}$	$\frac{1}{R}$

* Constante análoga.

dor de energía, pero describe la consecuencia de que haya una diferencia de temperaturas, describiendo sólo el flujo de calor.

Formación de un modelo para un sistema térmico

Considere un termómetro a una temperatura T que se sumerge en un líquido que está a una temperatura T_L (figura 2.33). Si la resistencia térmica al flujo de calor del líquido al termómetro es R, entonces, empleando la ecuación (63) se tiene

$$q = \frac{T_L - T}{R} \qquad [68]$$

donde q es la razón de flujo de calor neta del líquido al termómetro.

La capacitancia térmica C del termómetro está dada por la ecuación (64) como

$$q_1 - q_2 = C\frac{dT}{dt}$$

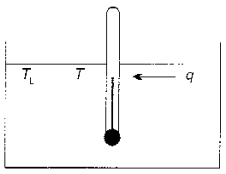


Figura 2.33 Un sistema térmico

Puesto que sólo hay un flujo de calor del líquido al termómetro, entonces $q_1 = q$ y $q_2 = 0$. De esta manera

$$q = C\frac{dT}{dt} \qquad [69]$$

Al sustituir el valor de q de esta última ecuación en la ecuación (66),

$$C\frac{dT}{dt} = \frac{T_L - T}{R}$$

Al reordenar esta ecuación se obtiene

$$RC\frac{dT}{dt} + T = T_L \qquad [70]$$

Esta ecuación describe cómo variará la temperatura T indicada por el termómetro cuando éste se sumerge en un líquido caliente. La analo-

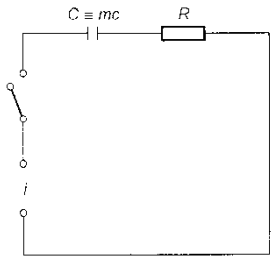


Figura 2.34 Analogía eléctrica de la figura 2.33

gía eléctrica de este sistema térmico es el circuito que ilustra la figura 2.34, un circuito resistor-capacitor en serie. Cerrar el interruptor equivale a la acción de sumergir el termómetro en el líquido, sólo entonces la corriente y el calor empiezan a fluir. El cambio en la temperatura del termómetro desde su valor inicial equivale al cambio en la diferencia de potencial a través del capacitor.

Al considerar el sistema térmico anterior, se supusieron los parámetros como concentrados. Esto significa que, por ejemplo, se supuso que todo el termómetro está a la misma temperatura al igual que todo el líquido, es decir, las temperaturas son funciones sólo del tiempo y no de la posición.

Ejemplo 9

La figura 2.35 muestra un sistema térmico que consta de un calefactor eléctrico en una habitación. El calefactor emite calor a la razón q_1 y la habitación pierde calor a la razón q_2. Al suponer que el aire en la habitación está a una temperatura uniforme T y que no se almacena calor en las paredes, obtener una ecuación que describa cómo cambiará con el tiempo la temperatura en la habitación.

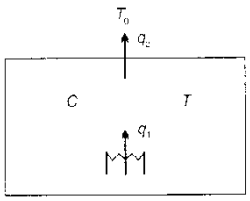


Figura 2.35 Ejemplo 9

Respuesta

Si el aire en la habitación tiene una capacitancia térmica C, entonces, empleando la ecuación (66)

$$q_1 - q_2 = C\frac{dT}{dt}$$

Si la temperatura en el interior de la habitación es T y en el exterior de ella es T_0, entonces, empleando la ecuación (63)

$$q_2 = \frac{(T - T_0)}{R}$$

donde R es la resistencia térmica de las paredes. Al sustituir q_2 se obtiene

$$q_1 - \frac{(T - T_0)}{R} = C\frac{dT}{dt}$$

Por lo tanto

$$RC\frac{dT}{dt} + T = Rq_1 + T_0$$

Elementos electromecánicos

Hasta ahora en este capítulo la atención se ha centrado en elementos puramente mecánicos, eléctricos, hidráulicos, etcétera. Sin embargo, hay algunos elementos que involucran más de un tipo de energía. Existen, por ejemplo, dispositivos electromecánicos como potenciómetros, motores y generadores. Un potenciómetro tiene una entrada

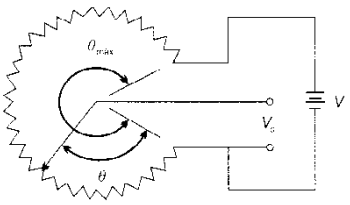


Figura 2.36 Potenciómetro

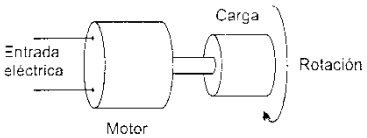
que es una rotación y una salida que es una diferencia de potencial; la rotación se usa para mover el contacto deslizante sobre el canal del potenciómetro (figura 2.36). Un motor eléctrico tiene una entrada que es una diferencia de potencial y una salida que es la rotación de un eje. Un generador tiene como entrada la rotación del eje y como salida una diferencia de potencial.

Para el potenciómetro de la figura 2.36, el cual es un divisor de voltaje,

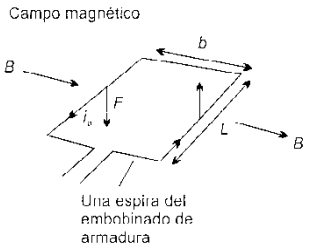
$$\frac{v_o}{V} = \frac{\theta}{\theta_{máx}}$$

donde V es la diferencia de potencial a través de todo el canal del potenciómetro y $\theta_{máx}$, el ángulo total de barrido mediante la perilla que gira de un extremo a otro del canal. De este modo, el cociente de la salida v_o a la entrada θ es

$$\frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{v_o}{\theta} = \frac{V}{\theta_{máx}} = \text{una constante} \qquad [71]$$



a)



b)

Figura 2.37 El motor de cd:
a) manejando una carga,
b) principio básico del motor

El motor de cd se usa para convertir una señal de entrada eléctrica en una señal de salida mecánica (figura 2.37*a*). El motor consta básicamente de un embobinado y el embobinado de armadura, el cual puede girar de manera libre. Este embobinado está ubicado en un campo magnético generado en forma normal, por una corriente que fluye por el embobinado de campo. Cuando una corriente i_a fluye por el embobinado de armadura, debido a que está en un campo magnético, sobre el embobinado actúan fuerzas que lo hacen girar (figura 2.37*b*). La fuerza F que actúa sobre el alambre por el cual pasa una corriente i_a y es de longitud L en un campo magnético con una densidad de flujo B ortogonales al alambre está dada por

$$F = Bi_a L$$

Con N alambres

$$F = NBi_a L$$

Las fuerzas sobre los alambres del embobinado de armadura dan por resultado un par T, donde $T = Fb$, y b es el ancho del embobinado. De este modo,

$$T = NBi_a Lb$$

El par resultante es proporcional a Bi_a, los otros factores son constantes. Por lo tanto, se puede escribir

$$T = k_1 Bi_a \qquad [72]$$

Puesto que la armadura es un embobinado giratorio en un campo magnético, en este se inducirá un voltaje como resultado de la inducción electromagnética. La dirección de este voltaje será de modo tal que se oponga al cambio que lo produce y se denomina fuerza contraelectromotriz. Esta fuerza contraelectromotriz v_b es proporcional

a la razón de rotación de la armadura y al flujo eslabonado por el embobinado, por lo tanto, la densidad de flujo B. De este modo

$$v_b = k_2 B\omega \qquad [73]$$

donde ω es la velocidad angular del eje y k_2 es una constante.

Con el denominado *motor controlado por armadura*, la corriente de campo i_f se mantiene constante y el motor se controla mediante el ajuste del voltaje de armadura v_a. Una corriente de campo constante significa que en el embobinado de armadura la densidad de flujo magnético B es constante. Así la ecuación (73) da por resultado

$$v_b = k_3\omega$$

donde k_3 es una constante. El circuito de armadura se puede considerar como una resistencia R_a en serie con una inductancia L_a y una fuente de fuerza contraelectromotriz (figura 2.38). De esta manera, si v_a es el voltaje aplicado al circuito de armadura, entonces

$$v_a - v_b = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a \qquad [74]$$

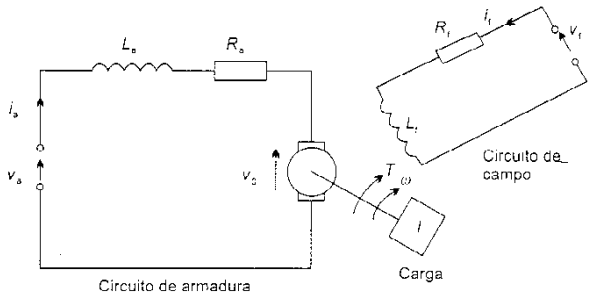


Figura 2.38 Circuitos del motor de cd

Esta ecuación se puede considerar como parte del diagrama de bloques de la figura 2.39*a*. La entrada a la parte del motor del sistema es v_a, la cual se suma con la señal de realimentación de la fuerza contraelectromotriz v_b para generar una señal de error que se usa como entrada al circuito de armadura. De este modo la ecuación anterior describe la relación entre la señal de error, que es la entrada al embobinado de armadura, y la salida de éste, que es la corriente de armadura i_a. Al sustituir v_b en la ecuación (74) se obtiene

$$v_a - k_3\omega = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a \qquad [75]$$

La corriente i_a en la armadura resulta en un par T, dado por la ecuación (72). Puesto que B es una constante, esta ecuación se convierte en

$$T = k_1 B i_a = k_4 i_a$$

donde k_4 es una constante. Este par entonces se convierte en la entrada al sistema de carga. El par neto que actúa sobre la carga será

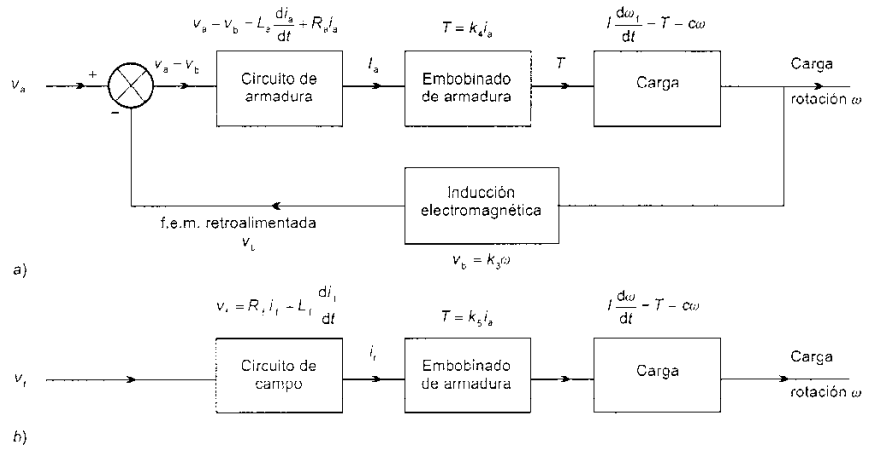


Figura 2.39 Motores de cd: a) controlado por armadura, b) controlado por campo

$$\text{Par neto} = T - \text{par de amortiguamiento}$$

El par de amortiguamiento es $c\omega$, donde c es una constante. Por lo tanto, si se desprecian los efectos debidos a la elasticidad torsional del eje

$$\text{Par neto} = k_4 i_a - c\omega$$

Esto producirá una aceleración angular de $d\omega / dt$, por lo tanto

$$I \frac{d\omega}{dt} = k_4 i_a - c\omega \qquad [76]$$

Las ecuaciones (75) y (76) describen las condiciones que se presentan para un motor controlado por armadura.

Con el denominado *motor controlado por campo* la corriente de armadura se mantiene constante y el motor se controla mediante la variación del voltaje de campo. Para el circuito de campo (figura 2.38) hay una inductancia L_f en serie con una resistencia R_f. Así, para ese circuito

$$v_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} \qquad [77]$$

El motor controlado por campo se puede considerar en términos del diagrama de bloques de la figura 2.39*b*. La entrada al sistema es v_f. El circuito de campo convierte este voltaje en una corriente i_f, la relación entre v_f e i_f está dada por la ecuación anterior. Esta corriente da como resultado la producción de un campo magnético y, por lo tanto, un par que actúa sobre el embobinado de armadura, como indica la ecuación (72). Pero la densidad de flujo magnético B es proporcional a la corriente del circuito de campo i_f y la i_a se mantiene constante, por lo que la ecuación (77) se puede escribir como

$$T = k_1 B i_a = k_2 i_f$$

donde k_2 es una constante. Este par de salida se convierte entonces, mediante el sistema de carga, en una velocidad angular ω. Como en principio, el par neto que actúa sobre la carga será

$$\text{Par neto} - T - \text{par de amortiguamiento}$$

El par de amortiguamiento es $c\omega$, donde c es una constante. Por lo tanto, si se desprecian los efectos debidos a la elasticidad torsional del eje

$$\text{Par neto} = k_2 i_f - c\omega$$

Esto producirá una aceleración angular de $d\omega/dt$, por lo tanto

$$I\frac{d\omega}{dt} = k_2 i_f - c\omega \qquad [78]$$

Las ecuaciones (77) y (78) describen las condiciones que se presentan para un motor controlado por campo.

Linealidad

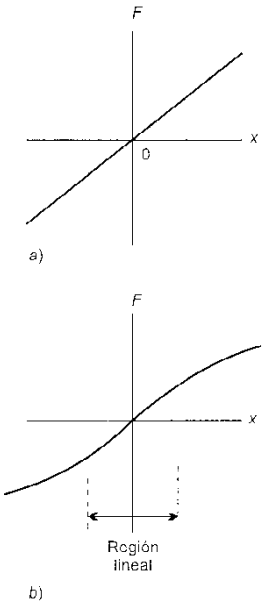


Figura 2.40 *a*) resorte ideal, *b*) resorte real

La relación entre la fuerza F y la deformación x producida para el resorte ideal es lineal y está dada por $F = kx$. Esto significa que la fuerza F_1 produce una deformación x_1 y que la fuerza F_2 produce una deformación x_2, entonces una fuerza igual a $(F_1 + F_2)$ producirá una deformación $(x_1 + x_2)$. Esto se denomina el *principio de superposición* y es una condición necesaria para un sistema lineal. Otra condición para un sistema lineal es que si una entrada F_1 produce una deformación x_1, entonces una entrada cF_1 producirá una salida cx_1, donde c es una constante multiplicativa. Cuando la relación es lineal, la gráfica de la fuerza F contra la deformación x es una línea recta que pasa por el origen (figura 2.40*a*).

Sin embargo, un resorte real como cualquier otro componente real, no son lineales de manera perfecta (figura 2.40*b*). No obstante, a menudo existe un intervalo de operación para el cual se puede suponer linealidad. Así, para la gráfica del resorte que muestra la figura 2.40*b* se puede suponer linealidad sólo en la parte central de su gráfica. Para muchos componentes de sistemas, se puede suponer linealidad cuando el intervalo de las variables están alrededor de algún punto de operación.

Para algunos componentes de sistemas (figura 2.41) la relación es no lineal. Para tales componentes lo mejor que se puede hacer para obtener una relación lineal es considerar la pendiente de la gráfica en el punto de operación. Así, la relación entre y y x en la figura 2.41, en el punto de operación P, donde la pendiente tiene valor m

$$\Delta y = m\Delta x \qquad [79]$$

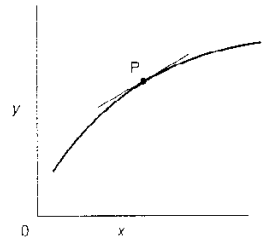


Figura 2.41 Una relación no lineal

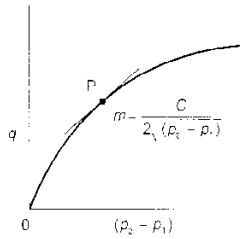


Figura 2.42 Flujo a través de un orificio $q = C\sqrt{(p_1 - p_2)}$

donde Δy y Δx son pequeños cambios en las señales de entrada y salida sobre el punto de operación.

Así, por ejemplo, la razón de flujo de líquido q a través de un orificio está dada por

$$q = c_d A\sqrt{[2(p_1 - p_2)/\rho]} \qquad [80]$$

donde c_d es una constante conocida como coeficiente de descarga, A es el área de la sección transversal del orificio, ρ es la densidad del fluido y $(p_1 - p_2)$, la diferencia de presiones. Para un área de la sección transversal y una densidad constantes la ecuación se puede escribir como

$$q = C\sqrt{(p_1 - p_2)} \qquad [81]$$

donde C es una constante. Ésta es una relación no lineal entre la razón de flujo y la diferencia de presiones. Es posible obtener una relación lineal considerando la pendiente de la gráfica razón de flujo/diferencia de presiones en el punto de operación (véase la figura 2.42). La pendiente es $dq/d(p_1 - p_2)$ y tiene el valor

$$m = \frac{dq}{d(p_1 - p_2)} = \frac{d[C\sqrt{(p_1 - p_2)}]}{d(p_1 - p_2)} = \frac{C}{2\sqrt{(p_{e1} - p_{e2})}} \qquad [82]$$

donde $(p_{e1} - p_{e2})$ es el valor en el punto de operación. Así, para pequeños cambios alrededor del punto de operación

$$\Delta q = m\Delta(p_1 - p_2) \qquad [83]$$

donde m tiene un valor dado por la ecuación (82).

Por lo tanto, para la ecuación (81), si se tiene $C = 2m^3/s$ por kPa, es decir,

$$q = 2\sqrt{(p_1 - p_2)}$$

entonces, para un punto de operación de $(p_1 - p_2) = 4$ kPa, la versión linealizada de la ecuación, es decir, ecuación (83), sería, empleando el valor de m dado por la ecuación (82)

$$\Delta q = \frac{2}{2\sqrt{4}}\Delta(p_1 - p_2)$$

$$\Delta q = 0.5\Delta(p_1 - p_2)$$

En el análisis anterior se supuso que el flujo era a través de un orificio en el que el área de la sección transversal era constante. Si el orificio es una válvula de control de flujo, entonces éste no es el caso, el área de la sección transversal se ajusta para variar la razón de flujo. En esta situación, en lugar de la ecuación (81) para la ecuación (80) se tendría

$$q = CA\sqrt{(p_1 - p_2)} \qquad [84]$$

y para cambios alrededor del punto de operación, la pendiente de la gráfica de q contra A, sería

$$m_1 = \frac{dq}{dA} = C\sqrt{(p_1 - p_2)}$$

y para una gráfica de q contra $(p_1 - p_2)$

$$m_2 = \frac{dq}{d(p_1 - p_2)} = \frac{CA}{2\sqrt{(p_1 \quad p_2)}}$$

La versión linealizada de la ecuación (84) es, de este modo

$$\Delta q = m_1 \Lambda A + m_2 \Lambda (p_1 - p_2) \qquad [85]$$

donde m_1 y m_2 tienen los valores antes indicados.

Los modelos matemáticos linealizados se utilizan debido a que la mayoría de las técnicas para sistemas de control se basan en que las relaciones de los elementos para dichos sistemas son lineales. También se debe a que en la mayor parte de los sistemas de control el valor de la salida se mantiene igual a un valor de referencia, las variaciones de este valor seas más bien pequeñas y así el modelo linealizado es el apropiado.

Ejemplo 10

Para medir temperatura en un sistema de control se utiliza un termistor. La relación entre la resistencia R del termistor y su temperatura T está dada por

$$R = k \exp - cT$$

Linealizar esta ecuación alrededor del punto de operación de T_o.

Respuesta

La pendiente m de la gráfica de R contra T en el punto de operación T_o está dada por dR / dT

$$m = \frac{dR}{dT} - kc \exp - cT_o$$

Por lo tanto

$$\Delta R = m\Delta T = (-kc \exp \quad cT_o)\Delta T$$

Elementos hidromecánicos

La figura 2.43 muestra un sistema hidráulico en el cual la entrada de desplazamiento x_i, después de pasar a través del sistema hidráulico, se transforma en el desplazamiento x_o de la carga. Este sistema se utiliza como la etapa de potencia en el sistema de guiado de un automóvil y usa una pequeña cantidad de potencia producida por el desplazamiento del volante, la cual se convierte en una gran cantidad de potencia capaz de producir el desplazamiento que mueve las ruedas del automóvil.

El sistema consiste en una *válvula de carretes* y un *cilindro*. El desplazamiento de entrada x_i hacia la izquierda hace que el fluido hidráulico a una presión p_s, que viene del suministro, fluya hacia el lado izquierdo del cilindro. Esto empuja al pistón en el cilindro hacia la derecha y expulsa el fluido al lado derecho de la cámara a través del puerto de salida en el extremo derecho de la válvula de carretes. La razón de flujo del fluido hacia y desde la cámara depende de la

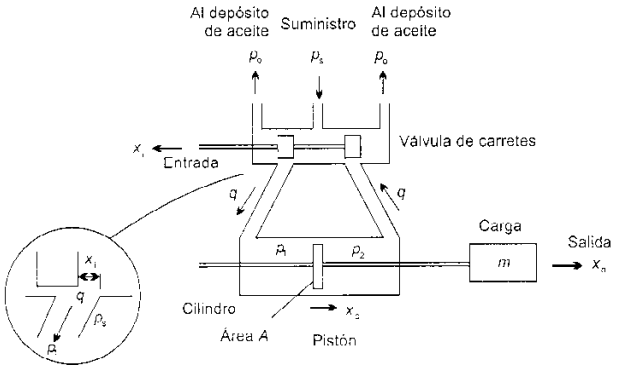


Figura 2.43 Sistema hidráulico y carga

extensión a la cual el movimiento de entrada ha cubierto los puertos que permiten que el fluido entre o salga de la válvula de carretes. Cuando el desplazamiento de entrada x_i es a la derecha la válvula de carretes permite que el fluido se mueva al lado derecho del cilindro, lo que propicia un movimiento del pistón en el cilindro hacia la izquierda.

La razón de flujo del fluido q a través de un orificio, como se pueden considerar los puertos de la válvula de carretes, es una relación no lineal (ecuación (80)) que depende de la diferencia de presiones entre los dos lados del orificio y del área de la sección transversal A de éste. Sin embargo, se puede utilizar una versión linealizada de esta ecuación, la ecuación (85), es decir

$$\Delta q = m_1 \Delta A + m_2 \Delta(\text{diferencia de presiones})$$

donde m_1 y m_2 son constantes evaluadas en el punto de operación. Las diferencias de presión para el fluido que entra a la cámara es $(p_s - p_1)$ y para el que sale $(p_2 - p_0)$. Si se toma como el punto de operación alrededor del cual se linealiza la ecuación la posición central de los carretes en la válvula y los puertos que conectan al cilindro están cerrados, entonces, para esta condición, q es cero y así $\Delta q = q$, el área A es proporcional a x_v, si x_v se mide desde su posición central y el cambio en la presión en el lado de entrada del pistón es $-\Delta p_1$ con referencia a p_s y en el lado de salida es Δp_2 con referencia a p_0. Entonces, para el puerto de entrada, la ecuación se puede escribir como

$$q = m_1 x_i + m_2(-\Delta p_1)$$

y para el puerto de salida

$$q = m_1 x_i + m_2 \Delta p_2$$

Al sumar estas dos ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} 2q &= 2m_1 x_i - m_2(\Delta p_1 - \Delta p_2) \\ q &= m_1 x_i - m_3(\Delta p_1 - \Delta p_2) \end{aligned} \qquad [86]$$

donde $m_3 = m_2/2$.

Para el cilindro el cambio en el volumen del fluido que entra al lado izquierdo de la cámara, o que sale del lado derecho, cuando el pistón se mueve a una distancia x_o es Ax_o, donde A es el área de la sección transversal del pistón. De este modo, la razón a la cual cambia el volumen es $A(\mathrm{d}x_o/\mathrm{d}t)$. La razón a la cual entra el fluido al lado izquierdo del cilindro es q. Sin embargo, puesto que hay un cierto flujo de fuga del fluido de un lado a otro del pistón

$$q = A\frac{\mathrm{d}x_o}{\mathrm{d}t} + q_L$$

donde q_L es la razón de fuga. Al sustituir q, y empleando la ecuación (85),

$$m_1x_i - m_3(\Delta p_1 - \Delta p_2) = A\frac{\mathrm{d}x_o}{\mathrm{d}t} + q_L \qquad [87]$$

La razón del flujo de fuga q_L es un flujo a través de un orificio: el espacio entre el pistón y el cilindro. Este orificio tiene un área de sección transversal constante y una diferencia de presiones, $(\Delta p_1 - \Delta p_2)$. Por lo tanto, con la ecuación linealizada para tal flujo, es decir, la ecuación (83),

$$q_L = m_2(\Delta p_1 - \Delta p_2)$$

De este modo, empleando esta ecuación para sustituir q_L en la ecuación (87)

$$m_1x_i - m_3(\Delta p_1 - \Delta p_2) = A\frac{\mathrm{d}x_o}{\mathrm{d}t} + m_4(\Delta p_1 - \Delta p_2)$$

$$m_1x_i - (m_3 + m_4)(\Delta p_1 - \Delta p_2) = A\frac{\mathrm{d}x_o}{\mathrm{d}t} \qquad [88]$$

La diferencia de presiones a través del pistón resulta en una fuerza que se ejerce sobre la carga, siendo ésta $(\Delta p_1 - \Delta p_2)A$. No obstante, hay un amortiguamiento en el movimiento, es decir, fricción de la masa. Esta fricción es proporcional a la velocidad de la masa, es decir, $(\mathrm{d}x_o/\mathrm{d}t)$. Por lo tanto, la fuerza neta que actúa sobre la carga es

$$\text{Fuerza neta} = (\Delta p_1 - \Delta p_2)A - c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Esta fuerza neta hace que la masa se acelere; esta aceleración es $(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)$ o $(\mathrm{d}^2x_o/\mathrm{d}t^2)$. Por lo tanto

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_o}{\mathrm{d}t^2} = (\Delta p_1 - \Delta p_2)A - c\frac{\mathrm{d}x_o}{\mathrm{d}t}$$

Al reordenar la ecuación se obtiene

$$\Delta p_1 - \Delta p_2 = \frac{m}{A}\frac{\mathrm{d}^2x_o}{\mathrm{d}t^2} + \frac{c}{A}\frac{\mathrm{d}x_o}{\mathrm{d}t}$$

Al sustituir la diferencia de presiones en la ecuación (88),

$$m_1 x_1 - (m_3 + m_4)\left(\frac{m}{A}\frac{d^2x_o}{dt^2} + \frac{c}{A}\frac{dx_o}{dt}\right) = A\frac{dx_o}{dt}$$

Reordenando ésta se obtiene

$$\frac{(m_3 + m_4)m}{A}\frac{d^2x_o}{dt^2} + \left(A + \frac{c(m_3 + m_4)}{A}\right)\frac{dx_o}{dt} = m_1 x_1 \qquad [89]$$

Esta ecuación se puede simplificar al introducir dos constantes: k y τ; esta última es la llamada constante de tiempo (vea el capítulo 3). Al reordenar la ecuación (89) se tiene

$$\frac{(m_3 + m_4)m}{A}\frac{d^2x_o}{dt} + \left(\frac{A^2 + c(m_3 + m_4)}{A}\right)\frac{dx_o}{dt} = m_1 x_1$$

$$\frac{(m_3 + m_4)m}{A^2 + c(m_3 + m_4)}\frac{d^2x_o}{dt^2} + \frac{dx_o}{dt} = \frac{Am_1}{A^2 + c(m_3 + m_4)}x_1$$

$$\tau\frac{d^2x_o}{dt^2} + \frac{dx_o}{dt} = kx_1 \qquad [90]$$

donde

$$\tau = \frac{(m_3 + m_4)m}{A^2 + c(m_3 + m_4)}$$

y

$$k = \frac{Am_1}{A^2 + c(m_3 + m_4)}$$

Problemas

1 Obtener una ecuación que relacione la entrada, la fuerza F, con la salida, el desplazamiento x, para el sistema que describe la figura 2.44.

2 Proponer un modelo para un eje escalonado, es decir, un eje en el que hay un cambio de diámetro que se usa para hacer girar una masa y obtenga una ecuación que relacione el par de entrada y la velocidad angular. Se puede despreciar el amortiguamiento.

3 Obtener la relación entre la salida, la diferencia de potencial v_R a través del resistor R, y la entrada v para el circuito que ilustra la figura 2.45, el cual tiene un resistor en serie con un capacitor.

4 Obtener la relación entre la salida, la diferencia de potencial v_R a través del resistor R, y la entrada v para el circuito RLC que muestra la figura 2.46.

5 Obtener la relación entre la salida, la diferencia de potencial v_C a través del capacitor C, y la entrada v para el circuito que muestra la figura 2.47.

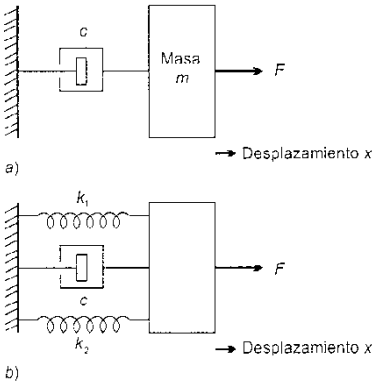


Figura 2.44 Problema 1

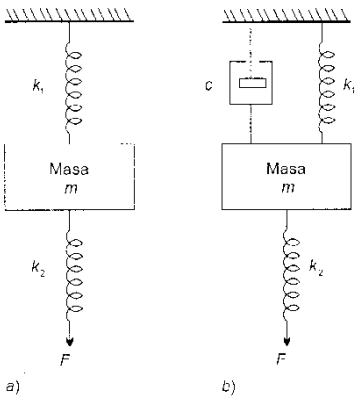


Figura 2.48 Problema 6

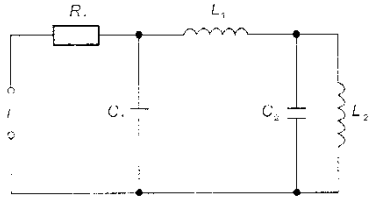


Figura 2.49 Problema 7

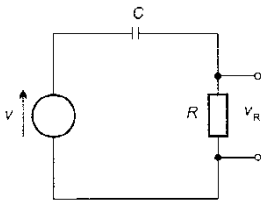


Figura 2.45 Problema 3

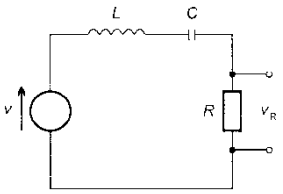


Figura 2.46 Problema 4

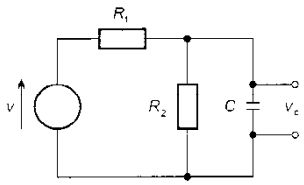


Figura 2.47 Problema 5

6 Dibujar un circuito eléctrico análogo para el sistema mecánico que describe la figura 2.48.

7 Dibujar la analogía mecánica para el circuito que ilustra la figura 2.49.

8 Obtener la relación entre la altura h_2 y el tiempo para el sistema hidráulico de la figura 2.50. La inertancia es despreciable.

9 La figura 2.51 muestra dos contenedores idénticos abiertos enlazados. Obtener la relación que indique cómo variará la altura del líquido en un contenedor si hay "movimiento" de líquido entre los dos contenedores como resultado de una perturbación en uno de ellos, como un incremento de presión en la superficie del líquido.

10 Un objeto caliente con capacitancia C a una temperatura T se enfría en una habitación grande la cual está a una temperatura T_r. Si el sistema térmico tiene una resistencia R, obtenga la ecuación que describa cómo cambia la temperatura del objeto caliente con el tiempo y dé una analogía eléctrica del sistema.

11 La figura 2.52 ilustra un sistema térmico que consta de dos compartimientos, uno de los cuales contiene un calefactor. Si la temperatura del compartimiento que contiene el calefactor es T_1, la temperatura del otro compartimiento es T_2 y la temperatura alrededor de los compartimientos es T_3, desarrolle las ecuaciones que describan cómo variarán con el tiempo las temperaturas T_1 y T_2. Todas las paredes de los contenedores tienen la misma resistencia y la capacitancia es despreciable. Los dos contenedores tienen la misma capacitancia C.

12 La relación entre la fuerza F empleada para estirar un resorte y su deformación x está dada por $F = kx^3$, donde k es una constante. Linealizar esta ecuación para un punto de operación de x_0.

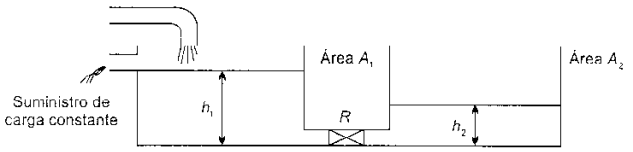


Figura 2.50 Problema 8

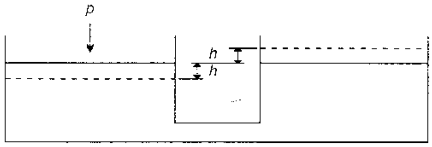


Figura 2.51 Problema 9

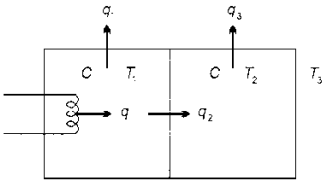


Figura 2.52 Problema 11

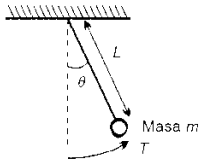


Figura 2.53 Problema 14

13 La relación entre una fuerza electromotriz E generada por un termopar y la temperatura T es

$$E = aT + bT^2$$

donde a y b son constantes. Linealizar esta ecuación para un punto de operación de temperatura T_0.

14 La relación entre el par T aplicado a un péndulo simple y deflexión angular θ (véase la figura 2.53) está dada por

$$T = mgL\,\text{sen}\theta$$

donde m es la masa de la pesa del péndulo, L la longitud del péndulo y g la aceleración debida a la gravedad. Linealizar esta ecuación para un ángulo de equilibrio θ de 0°.

3 Respuesta del sistema

Introducción

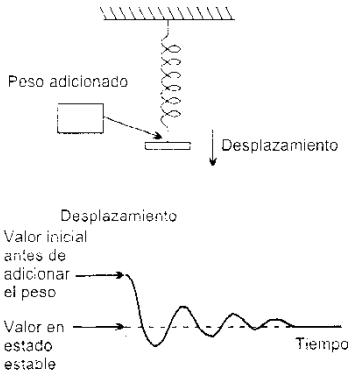


Figura 3.1 Respuestas transitoria y en estado estable de un sistema resorte

La respuesta de un sistema de control, o de un elemento del sistema, está formada de dos partes: la respuesta en estado estable y la respuesta transitoria. La *respuesta transitoria* es la parte de la respuesta de un sistema que se presenta cuando hay un cambio en la entrada y desaparece después de un breve intervalo. La *respuesta en estado estable* es la respuesta que permanece después de que desaparecen todos los transitorios. Para ilustrar esto de una manera sencilla, considere un resorte suspendido en forma vertical (figura 3.1) y lo que ocurre cuando de él súbitamente se suspende un peso. La deformación del resorte se incrementa de manera abrupta y así puede oscilar hasta que después de un tiempo se asienta en un valor estable. El valor estable es la respuesta en estado estable del sistema resorte; la oscilación que se presenta antes de este estado estable es la respuesta transitoria.

La entrada al sistema resorte es una cantidad que varía con el tiempo; esta entrada es el peso. Durante cierto tiempo no se adiciona peso, y es hasta después de ese tiempo que se agrega el peso. Este tipo de entrada se conoce como entrada escalón. La salida del sistema es un valor que varía con el tiempo. Tanto la entrada como la salida son funciones del tiempo. Una manera de indicar esto es escribirlas en la forma $f(t)$, donde f es una función y (t) indica que su valor depende del tiempo t. Observe que $f(t)$ no significa que f deba multiplicarse por t. Así, para el peso W la entrada al sistema resorte se podría escribir $W(t)$ y para la deformación d de salida $d(t)$. Un diagrama de bloques del sistema sería la figura 3.2.

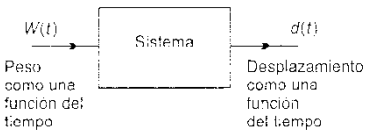


Figura 3.2 El sistema resorte

Para describir por completo el comportamiento de un sistema el modelo debe considerar la relación entre las entradas y las salidas, las cuales son funciones del tiempo y, por lo tanto, son capaces de describir los comportamientos tanto transitorio como en estado estable. Así, se necesitará un modelo que indique cómo variará la respuesta del sistema con el tiempo. Un tipo de modelo que con frecuencia se emplea para describir el comportamiento de un sistema de control o un elemento del sistema de control es una *ecuación diferencial*. Este modelo incluye derivadas con respecto al tiempo y así proporciona información acerca de cómo varía la respuesta de un

sistema con el tiempo. Una derivada dx/dt describe la razón a la cual varía x respecto al tiempo, la derivada d^2x/dt^2 (o $d(dx/dt)/dt$) establece cómo varía dx/dt con el tiempo.

Las ecuaciones diferenciales son las que involucran derivadas. Éstas se pueden clasificar como de *primer orden*, *segundo orden*, *tercer orden*, etcétera, de acuerdo con la derivada de mayor orden en la ecuación. Para una ecuación de primer orden el mayor orden será dx/dt, con una de segundo orden d^2x/dt^2, con una de tercer orden d^3x/dt^3 y con una de n-ésimo orden d^nx/dt^n.

Este capítulo trata los tipos de respuestas que se pueden esperar de sistemas de primero y segundo orden, así como la solución de dichas ecuaciones diferenciales con el fin de obtener la respuesta del sistema ante diferentes tipos de entradas. Los métodos empleados se pueden clasificar en esencia, en los que se prueba una solución que la satisfaga y, en los que la ecuación se transforma en otra forma que se puede manejar mediante álgebra convencional. Este capítulo se refiere a los métodos "prueba una solución" y el capítulo 4 a los métodos basados en transformaciones.

Ejemplos de sistemas de primer orden

Un ejemplo de sistema de primer orden es un tanque de agua controlado por un flotador (figura 3.3*a*). En este sistema la razón a la cual entra el agua al tanque y, por lo tanto, la razón a la que cambia la altura del agua en el tanque con el tiempo, depende de la diferencia entre la altura del agua h en el tanque y la altura H a la que el flotador cierra por completo la entrada del agua, es decir,

La razón de cambio de la altura es proporcional a $(H - h)$

Por lo tanto

$$\frac{dh}{dt} = k(H - h)$$

donde dh/dt es la razón de cambio de la altura y k, una constante.

Mientras más sube el nivel del agua el valor de $(H - h)$ es menor y, de esta forma, es menor la razón de cambio de la altura con el tiempo (dh/dt). Una gráfica de la altura de agua contra el tiempo se vería como muestra la figura 3.3*b*. La ecuación que describe esta gráfica es

$$h = H(1 - e^{-kt})$$

En este sistema se puede considerar como entrada la altura requerida H y una salida h (figura 3.3*c*).

Otro ejemplo de un sistema de primer orden es un capacitor en serie con un resistor (figura 3.4). La razón de cambio de la diferencia de potencial v_c a través del capacitor con el tiempo, es decir, dv_c/dt es proporcional a la diferencia en valor entre v_c y el voltaje de entrada al sistema V.

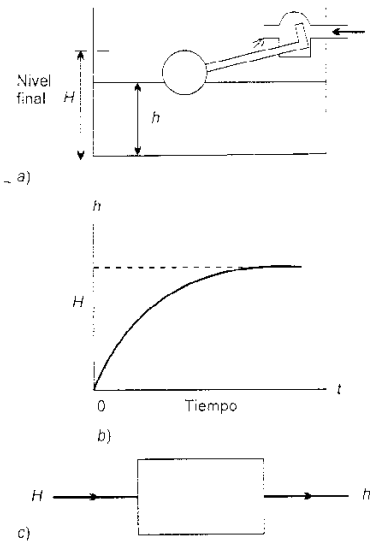


Figura 3.3 *a*) Tanque de agua controlado por un flotador, *b*) variación de la altura del agua con el tiempo, *c*) el sistema con su entrada y su salida

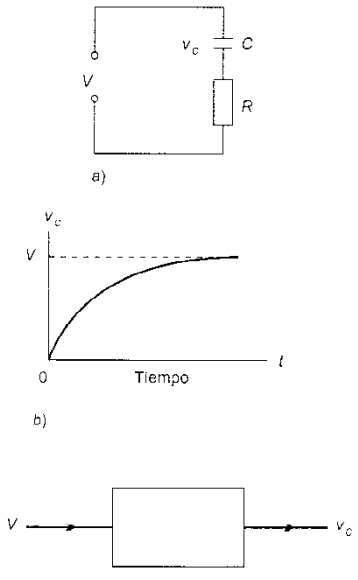


Figura 3.4 *a*) Circuito *RC* en serie, *b*) variación de la diferencia de potencial a través del capacitor con el tiempo, *c*) el sistema y su entrada y salida

La razón de cambio de v_C es proporcional a $(V - v_C)$

En general, esto se escribe como

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{RC}(V - v_C)$$

donde R es la resistencia y C es la capacitancia. La figura 3.4*b* muestra cómo varía v_C con el tiempo. La gráfica tiene la ecuación

$$v_C = V(1 - e^{-t/RC})$$

Se puede considerar que este sistema tiene como entrada el voltaje V y como salida la diferencia de potencial v_C (figura 3.4*c*).

Todos los sistemas de primer orden tienen la característica que la razón de cambio de alguna variable es proporcional a la diferencia entre esta variable y algún valor de ajuste de la variable (aun cuando éste sea cero).

Ejemplo 1

Cuando un termómetro se sumerge en un líquido caliente a una temperatura θ_H, la razón de cambio a la cual cambia la lectura de θ es proporcional a la diferencia entre θ y θ_H. ¿Cuál será *a*) la forma de la ecuación diferencial que describe cómo cambia la temperatura del termómetro con el tiempo y *b*) la ecuación de la gráfica de θ contra el tiempo?

Respuesta

a) Para el sistema se tiene

La razón de cambio de θ es proporcional a $(\theta_H - \theta)$

Así, la ecuación diferencial es

$$\frac{d\theta}{dt} \text{ es proporcional a } (\theta_H - \theta)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = k(\theta_H - \theta)$$

donde k es una constante. Esta es la típica relación de un sistema de primer orden.

b) Para un sistema de primer orden con una entrada θ_H y una salida θ se tendrá el tipo de ecuación típica de un sistema de primer orden, a saber

$$\theta = \theta_H(1 - e^{-kt})$$

La ecuación diferencial de primer orden

Una ecuación diferencial de primer orden es en general de la forma

La razón de cambio de la señal de salida es proporcional a $(b_0\theta_i - a_0\theta_o)$

o, como se escribe normalmente,

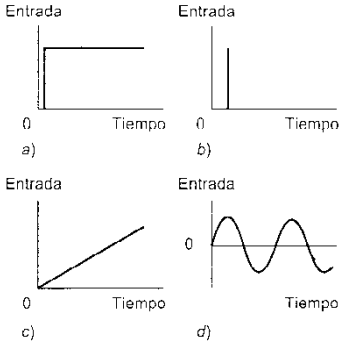


Figura 3.5 Señales de entrada: *a*) escalón, *b*) impulso, *c*) rampa y *d*) senoidal

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0 \theta_o = b_0 \theta_i \qquad [1]$$

donde a_1, a_0 y b_0 son constantes, θ_i es la función de entrada al sistema y θ_o la salida. $d\theta_o/dt$ es la razón de cambio a la cual la salida cambia con el tiempo.

Las señales de entrada al sistema pueden adoptar diferentes formas. Una de las más comunes es la entrada escalón. Ésta se presenta cuando la entrada cambia de valor de manera abrupta, como en la figura 3.5*a*. Un ejemplo de este caso es cuando el voltaje se conecta en forma súbita en un circuito, por ejemplo, el circuito *CR* en serie de la figura 3.4*a*. Otras formas de entrada que a menudo se encuentran son las señales impulso, rampa y senoidal (figura 3.5). Un impulso es una entrada de muy corta duración, una rampa es una señal que se incrementa en forma estable, y una entrada senoidal es aquella cuyas oscilaciones se pueden describir mediante una ecuación de la forma sen ωt, siendo ω la frecuencia angular.

Solución de una ecuación diferencial de primer orden

Existen diversos métodos para resolver una ecuación diferencial de primer orden, un método general es como el que se describe enseguida. Para la ecuación (1)

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0 \theta_o = b_0 \theta_i$$

si se hace la sustitución

$$\theta_o = u + v$$

entonces

$$a_1 \frac{d(u+v)}{dt} + a_0 (u+v) = b\theta_i$$

Al reordenar se obtiene

$$\left(a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u \right) + \left(a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v \right) = b\theta_i$$

Si se hace

$$a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v = b\theta_i \qquad [2]$$

entonces se debe tener

$$a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u = 0 \qquad [3]$$

Al resolver la última ecuación, se obtiene un valor para u en una ecuación que no tiene entrada. Por esta razón u se conoce como *respuesta transitoria* o *libre* y es parte de la solución. La ecuación que involucra v tiene la función de entrada y da un valor de v cuando existe la entrada, la cual fuerza una respuesta particular del sistema.

$$\theta_o = (b_0 / a_0)\theta_i[1 - \exp - (a_0 t / a_1)] \qquad [4]$$

Cuando $t = 0$, entonces el término exponencial tiene el valor de 1 y así $\theta_o = 0$. Cuando $t = \infty$, el término exponencial tiene un valor de 0 y así $a_0 = (b_0 / a_0)\theta_i$. Éste es el valor de la salida que se presenta cuando los efectos transitorios han desaparecido, es decir, el valor en estado estable. De este modo, la relación entre la salida y la entrada en estado estable es

$$\theta_o = (b_0 / a_0)\theta_i$$

y la función de transferencia G_{SS} en estado estable es

$$G_{SS} = \frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{b_0}{a_0} \qquad [5]$$

La ecuación (4) puede así escribirse como

$$\theta_o = G_{SS}\theta_i[1 - \exp - (a_0 t / a_1)] \qquad [6]$$

Cuando el tiempo es $t = (a_1 / a_0)$ entonces el término exponencial tiene el valor de $e^{-1} = 0.37$ y

$$\theta_o = G_{SS}\theta_i(1 - 0.37) = 0.63G_{SS}\theta_i$$

En este tiempo la salida ha alcanzado el 0.63 de su valor en estado estable. Este tiempo se denomina *constante de tiempo*, τ. En un tiempo de $2(a_1 / a_0) = 2\tau$, el término exponencial se convierte en $e^{-2} = 0.14$, y así

$$\theta_o = G_{SS}\theta_i(1 - 0.14) = 0.86G_{SS}\theta_i$$

De manera similar, los valores para la salida se pueden calcular después de 3τ, 4τ, 5τ, etcétera. La tabla 3.1 presenta los resultados de dicho cálculo y la figura 3.7 la gráfica de θ_o/θ_i, graficada contra el tiempo. Estos resultados son generales y se aplican a todos los sistemas representados por ecuaciones diferenciales de primer orden.

Así, la ecuación (6) se puede escribir en términos de la constante de tiempo como

$$\theta_o = G_{SS}\theta_o(1 - e^{-t/\tau}) \qquad [7]$$

y se pueden usar las relaciones $G_{SS} = b_0 / a_0$ y $\tau = a_1 / a_0$ para escribir la ecuación diferencial de primer orden (ecuación (1)) en la forma

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b_0\theta_i$$

$$\frac{a_1 d\theta_o}{a_0 dt} + \theta_o = \frac{b_0}{a_0}\theta_i$$

$$\tau \frac{d\theta_o}{dt} + \theta_o = G_{SS}\theta_i \qquad [8]$$

Tabla 3.1 Respuesta de un sistema de primer orden a una entrada escalón

Tiempo t	θ_o/θ_i
0	0
1τ	$0.63G_{SS}$
2τ	$0.86G_{SS}$
3τ	$0.95G_{SS}$
4τ	$0.98G_{SS}$
5τ	$0.99G_{SS}$
∞	G_{SS}

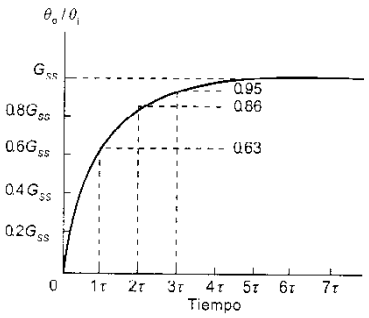


Figura 3.7 Respuesta de un sistema de primer orden a una entrada escalón

Por esta razón v se denomina *respuesta forzada* y es parte de la solución. Esta solución total es, entonces

$$\theta_o = \underset{\text{Respuesta transitoria}}{u} + \underset{\text{Respuesta forzada}}{v}$$

Para obtener la respuesta transitoria no es necesario conocer ninguna forma que adopte la entrada; la respuesta es independiente de la entrada. De este modo, se necesita resolver la ecuación diferencial (3), lo cual se puede lograr mediante la prueba de una solución. Se supone

$$u = A\,e^{st}$$

Entonces, puesto que $du/dt = Ase^{st}$, la ecuación diferencial se convierte en

$$a_1 Ase^{st} + a_0 A\,e^{st} = 0$$

y así, dado que el término $A\,e^{st}$ se cancela

$$a_1 s + a_0 = 0$$

$$s = -\frac{a_0}{a_1}$$

De esta manera

$$u = A\exp(-(a_0/a_1)t)$$

Para obtener la solución de la ecuación diferencial (2)

$$a_1\frac{dv}{dt} + a_0 v = b\theta_i$$

también se prueba una solución. La forma de la solución a probar dependerá de la forma de la señal de entrada. De este modo para una entrada escalón cuando θ_i es una constante para tiempos mayores a $t = 0$, la solución que se prueba es $v = k$ donde k es una constante. Si se tiene una entrada que se puede describir mediante una ecuación de la forma $\theta_i = a + bt + ct^2 + \ldots$, donde cualquiera de los coeficientes a, b, c, etcétera puede ser cero, entonces se prueba una solución de la forma $v = a + bt + ct^2 + \ldots$. Por lo tanto, para una señal rampa donde se tiene $\theta_i = bt$ entonces la solución a probar es $v = bt$. Para una señal seno o coseno se prueba con $v = A\,\text{sen}\,\omega t + B\cos\omega t$.

Suponga que la entrada que se toma es una entrada escalón (figura 3.5*a*) que se presenta en $t = 0$, es decir, la entrada súbitamente brinca de $t = 0$ a un valor θ_i, y permanece constante en ese valor para el resto del tiempo; entonces se puede probar como posible solución

$$v = k$$

Puesto que k es una constante, $dv/dt = 0$ y así la ecuación diferencial se convierte en

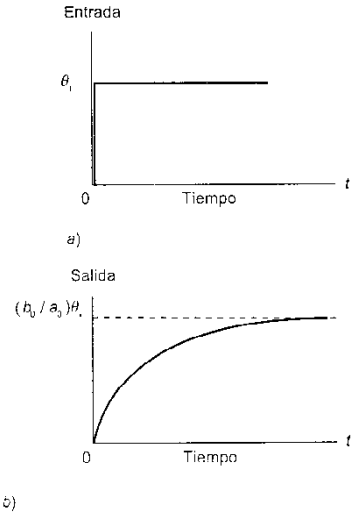


Figura 3.6 *a*) Entrada escalón para un sistema de primer orden y *b*) la salida resultante

$$a_0 k - b_0 \theta_i$$

y así

$$v = \frac{b_0 \theta_i}{a_0}$$

De este modo, la solución completa es

$$\theta_o = u + v$$

$$\theta_o = A \exp -(a_0 t / a_1) + (b_0 / a_0)\theta_i$$

El valor de la constante A se puede determinar al dar una condición inicial (o en frontera). Así, si $\theta_o = 0$ cuando $t = 0$, entonces

$$0 = A + (b_0 / a_0)\theta_i$$

De esta manera, $A = -(b_0 / a_0)\theta_i$, y así la ecuación se convierte en

$$\theta_o = -(b_0 / a_0)\theta_i \exp -(a_0 t / a_1) + (b_0 / a_0)\theta_i$$

$$\theta_o = (b_0 / a_0)\theta_i[1 - \exp(-a_0 t / a_1)] \qquad [4]$$

La figura 3.6*b* muestra la gráfica de cómo varía la salida θ_o con el tiempo para la entrada escalón que ilustra la figura 3.6*a*. La gráfica y la ecuación son generales y describen la respuesta de todos los sistemas de primer orden a una entrada escalón que se presenta en $t = 0$.

Ejemplo 2

Un sistema eléctrico formado por un resistor en serie con un capacitor (como describe la figura 3.4), cuando está sujeto a una entrada escalón de magnitud V exhibe como salida una diferencia de potencial a través del capacitor v_C, la cual está dada por la ecuación diferencial

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = V$$

¿Cuál es la solución de la ecuación diferencial, es decir, cómo varía v_C con el tiempo?

Respuesta

Al comparar la ecuación diferencial con la ecuación (1)

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0 \theta_o = b_0 \theta_i$$

entonces $a_1 = RC$, $a_0 = 1$ y $b_0 = 1$. Así, la solución es de la forma dada por la ecuación [4]

$$\theta_o = (b_0 / a_0)\theta_i[1 - \exp -(a_0 t / a_1)]$$

$$v_C = V[1 - \exp \quad (t / RC)]$$

La constante de tiempo

Para la solución, ecuación (4), de una ecuación diferencial de primer orden (1)

$$\theta_o = (b_0 / a_0)\theta_i[1 - \exp - (a_0 t / a_1)] \qquad [4]$$

Cuando $t = 0$, entonces el término exponencial tiene el valor de 1 y así $\theta_o = 0$. Cuando $t = \infty$, el término exponencial tiene un valor de 0 y así $a_0 = (b_0 / a_0)\theta_i$. Éste es el valor de la salida que se presenta cuando los efectos transitorios han desaparecido, es decir, el valor en estado estable. De este modo, la relación entre la salida y la entrada en estado estable es

$$\theta_o = (b_0 / a_0)\theta_i$$

y la función de transferencia G_{SS} en estado estable es

$$G_{SS} = \frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{b_0}{a_0} \qquad [5]$$

La ecuación (4) puede así escribirse como

$$\theta_o = G_{SS}\theta_i[1 - \exp - (a_0 t / a_1)] \qquad [6]$$

Cuando el tiempo es $t = (a_1 / a_0)$ entonces el término exponencial tiene el valor de $e^{-1} = 0.37$ y

$$\theta_o = G_{SS}\theta_i(1 - 0.37) = 0.63 G_{SS}\theta_i$$

En este tiempo la salida ha alcanzado el 0.63 de su valor en estado estable. Este tiempo se denomina *constante de tiempo*, τ. En un tiempo de $2(a_1 / a_0) = 2\tau$, el término exponencial se convierte en $e^{-2} = 0.14$, y así

$$\theta_o = G_{SS}\theta_i(1 - 0.14) = 0.86 G_{SS}\theta_i$$

De manera similar, los valores para la salida se pueden calcular después de 3τ, 4τ, 5τ, etcétera. La tabla 3.1 presenta los resultados de dicho cálculo y la figura 3.7 la gráfica de θ_o/θ_i, graficada contra el tiempo. Estos resultados son generales y se aplican a todos los sistemas representados por ecuaciones diferenciales de primer orden.

Así, la ecuación (6) se puede escribir en términos de la constante de tiempo como

$$\theta_o = G_{SS}\theta_o(1 - e^{-t/\tau}) \qquad [7]$$

y se pueden usar las relaciones $G_{SS} = b_0/a_0$ y $\tau = a_1/a_0$ para escribir la ecuación diferencial de primer orden (ecuación (1)) en la forma

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b_0\theta_i$$

$$\frac{a_1 d\theta_o}{a_0 dt} + \theta_o = \frac{b_0}{a_0}\theta_i$$

$$\tau \frac{d\theta_o}{dt} + \theta_o = G_{SS}\theta_i \qquad [8]$$

Tabla 3.1 Respuesta de un sistema de primer orden a una entrada escalón

Tiempo t	θ_o/θ_i
0	0
1τ	$0.63G_{SS}$
2τ	$0.86G_{SS}$
3τ	$0.95G_{SS}$
4τ	$0.98G_{SS}$
5τ	$0.99G_{SS}$
∞	G_{SS}

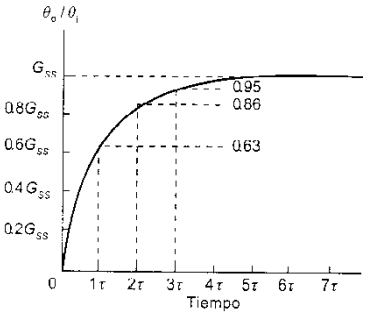


Figura 3.7 Respuesta de un sistema de primer orden a una entrada escalón

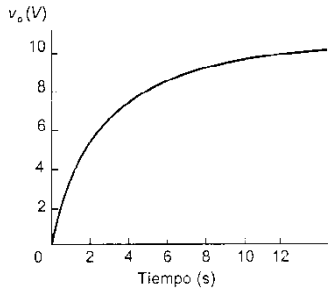


Figura 3.8 Ejemplo 3

Ejemplo 3

La figura 3.8 muestra cómo la salida v_o de un sistema de primer orden varía con el tiempo cuando está sujeto a una entrada escalón de 5 V. Estimar *a*) la constante de tiempo, *b*) la función de transferencia en estado estable y *c*) la ecuación diferencial de primer orden para el sistema.

Respuesta

a) La constante de tiempo τ es el tiempo que toma para que cambie la salida de un sistema de primer orden de 0 a 0.63 de su valor en estado estable. En este caso el tiempo es de casi 3 s. Este valor se puede verificar dado que el sistema es de primer orden, mediante la evaluación de la salida en 2τ, es decir, 6 s. Con un sistema de primer orden éste sería 0.86 del valor en estado estable, que en este caso sí es.

b) La salida en estado estable es 10 V. De este modo, la función de transferencia en estado estable G_{SS} es (valor en estado estable de salida/entrada) = 10/5 = 2.

c) La ecuación diferencial para el sistema de primer orden se puede escribir como (ecuación (8))

$$\tau \frac{d\theta_o}{dt} + \theta_o = G_{SS}\theta_i$$

$$3\frac{dv_o}{dt} + v_o = 2v_i$$

Ejemplo 4

La relación entre la velocidad angular de salida ω_o y el voltaje de entrada v_i para un motor sujeto a una entrada escalón está dada por

$$\frac{JR}{K_1K_2}\frac{d\omega_o}{dt} + \omega_o = \frac{1}{K_1}v_i$$

¿Cuál será el valor en estado estable de la velocidad angular y la constante de tiempo del sistema cuando $v_i = V$?

Respuesta

La ecuación diferencial se puede comparar con la ecuación (8)

$$\tau \frac{d\theta_o}{dt} + \theta_o = G_{SS}\theta_i$$

De este modo, la función de transferencia en estado estable G_{SS} es $1/K_1$ y, por lo tanto, la velocidad angular en estado estable es $(1/K_1)v_i$. La constante de tiempo es JR/K_1K_2.

El operador D

Una manera de plantear una ecuación diferencial es en términos de lo que se denomina el *operador D*. En una ecuación diferencial $d\theta/dt$ se reemplaza por $D\theta$, donde D se conoce como el *operador*. De manera similar, $d^2\theta/dt^2$ se puede reemplazar por $D^2\theta$. En general

$$D^n\theta = \frac{d^n\theta}{dt^n} \qquad [9]$$

La integración de θ en una ecuación implica reemplazarla por $D^{-1}\theta$. El operador D, combinado con constantes y potencias enteras de sí mismo, se puede manipular mediante las reglas generales del álgebra. Así, por ejemplo

$$D\theta + \theta = (D+1)\theta$$

donde θ es la variable;

$$D(u+v) = Du + Dv$$

donde u y v son las variables; y

$$D^n D^m \theta = D^{n+m}\theta$$

donde θ es la variable, y n y m son enteros positivos.

El operador D y la ecuación diferencial de primer orden

Una ecuación diferencial de primer orden (ecuación (1))

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b_0\theta_i$$

cuando se escribe en términos del operador D, se convierte en

$$a_1 D\theta_o + a_0\theta_o = b_0\theta_i \qquad [10]$$

Existen varios procedimientos para resolver ecuaciones diferenciales expresadas en esta forma. Un método es seguir una técnica similar a la que se describió al inicio de este capítulo para la solución de ecuaciones diferenciales en las que se tienen respuestas transitoria y forzada.

De este modo, sea

$$\theta_o = u + v$$

entonces

$$D\theta_o = Du + Dv$$

y así la ecuación (10) se convierte en

$$a_1(Du + Dv) + a_0(u+v) = b_0\theta_i$$

$$(a_1 Du + a_0 u) + (a_1 Dv + a_0 v) = b_0\theta_i$$

Si

$$a_1 Dv + a_0 v = b_0\theta_i \qquad [11]$$

entonces

$$a_1 Du + a_0 u = 0 \qquad [12]$$

u es la solución cuando no hay entrada, es decir, la solución transitoria. Suponga que para esta ecuación transitoria se prueba una solución de la forma

$$u = Ae^{st}$$

entonces

$$\frac{du}{dt} = Du = Ase^{st}$$

Por lo tanto, la ecuación (12) se convierte en

$$(a_1 s + a_0)Ae^{st} - 0$$

y así

$$(a_1 s + a_0) = 0$$

Esta ecuación se denomina *ecuación auxiliar*. Ésta, en efecto se forma al tomar la ecuación diferencial para θ_o en la forma del operador D, haciendo θ_i igual a cero y sustituyendo el operador diferencial por la variable algebraica s. Por lo tanto, $s = -a_0/a_1$ y la solución transitoria es

$$u = Ae^{st} = A\exp(-a_0 t/a_1)$$

Para obtener la solución de la ecuación diferencial (11)

$$a_1 Dv + a_0 v = b\theta_i$$

también se prueba una solución. La forma de la solución a probar dependerá de la forma de la señal de entrada. Así, para una entrada escalón cuando θ_i es una constante para tiempos mayores que $t = 0$, la solución a probar es $v = k$, donde k es una constante. Cuando se tiene una señal que se puede describir mediante una ecuación de la forma $\theta_i = a + bt + ct^2 + \ldots$, donde cualquiera de los coeficientes a, b, c, etcétera, puede ser cero, entonces se prueba una solución de la forma $v = a + bt + ct^2 + \ldots$. Por lo tanto, para una señal rampa donde se tiene $\theta_i = bt$ entonces la solución a probar es $v - bt$. Para una señal seno o coseno se prueba con $v = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$.

Suponga que se toma la entrada que es una entrada escalón que se presenta en $t = 0$, es decir, la entrada brinca súbitamente de $t = 0$ a un valor θ_i, y se mantiene constante en ese valor para el resto del tiempo, entonces se puede probar como posible solución

$$v = k$$

Puesto que k es una constante $dv/dt = Dv = 0$, la ecuación diferencial se convierte en

$$a_0 k = b_0 \theta_i$$

y así

$$v = \frac{b_0}{a_0}\theta_i$$

La solución completa es, de este modo

$$\theta_o = u + v$$

$$\theta_o = A\exp - (a_0 t/a_1) + (b_0/a_0)\theta_i$$

El valor de la constante A se puede determinar al dar una condición inicial (o en frontera). De esta forma, si $\theta_o = 0$ cuando $t - 0$, entonces

$$0 = A + (b_0/a_0)\theta_i$$

De esta manera, $A = -(b_0/a_0)\theta_i$, y así la ecuación se convierte en

$$\theta_i = -(b_0/a_0)\theta_i \exp-(a_0 t/a_1) + (b_0/a_0)\theta_i$$

$$\theta_o = (b_0/a_0)\theta_i[1 - \exp(-a_0 t/a_1)] \qquad [13]$$

El valor en estado estable de la salida θ_o se obtiene cuando en ésta no hay cambios con el tiempo, es decir, $d\theta_o/dt = D\theta_o = 0$. Cuando éstos se presentan entonces $\theta_o/\theta_i = b_0/a_0$. De esta manera, la función de transferencia en estado estable G_{SS} se puede definir como

$$G_{SS} = \frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{b_0}{a_0}$$

a_1/a_0 se llama la constante de tiempo τ (vea al inicio de este capítulo) y así la ecuación (13) se puede escribir como

$$\theta_o = G_{SS}\theta_i(1 - e^{-t/\tau}) \qquad [14]$$

La ecuación (10) en función del operador D para el sistema de primer orden

$$a_1 D\theta_o + a_0\theta_o = b_0\theta_i$$

a menudo se escribe en la forma

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{b_0}{a_1 D + a_0}$$

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{b_0/a_0}{(a_1/a_0)D + 1}$$

y con la constante de tiempo τ como a_1/a_0 y la función de transferencia en estado estable G_{SS} como b_0/a_0

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{G_{SS}}{\tau D + 1} \qquad [15]$$

Esta forma de ecuación es tipica de un sistema de primer orden.

Ejemplo 5

El desplazamiento d de un fuelle (figura 3.9) se relaciona con la presión manométrica p, es decir, la presión en el fuelle es relativa a la presión atmosférica, mediante una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{d}{p} = \frac{k}{\tau D + 1}$$

Resolver la ecuación para una entrada escalón de presión en $t = 0$.

Respuesta

Esta ecuación es de la forma de la ecuación (15)

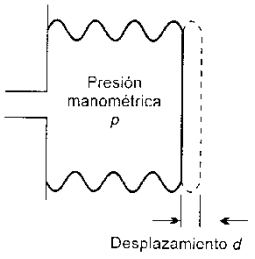


Figura 3.9 Ejemplo 5

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{G_{SS}}{\tau D + 1}$$

para la cual la solución, cuando había una entrada escalón en $t = 0$, es de la forma de la ecuación (14)

$$\theta_o = G_{SS}\theta_i(1 - e^{-t/\tau})$$

Así, la solución para el fuelle es

$$d = kp(1 - e^{-t/\tau})$$

Ejemplos de sistemas de segundo orden

Muchos sistemas de segundo orden se pueden considerar, en esencia, sólo como un resorte con una masa y algún medio para proporcionar amortiguamiento. La figura 3.10 ilustra las bases de dicho sistema. Las fuerzas que actúan sobre la masa m son la fuerza aplicada F en una dirección y, en la dirección contraria, la fuerza generada por el resorte estirado y el amortiguamiento. La fuerza debida al resorte es proporcional a la cantidad x, que es lo que se ha estirado el resorte y así se puede escribir como kx, donde k es la constante para el resorte. La fuerza debida al amortiguamiento, efectivamente un pistón que se mueve en un contenedor, es proporcional a la razón a que cambia el desplazamiento del pistón, es decir, proporcional a dx/dt. Así, la fuerza debida al amortiguamiento se puede escribir como $c dx/dt$, donde c es una constante. Por lo tanto, la fuerza neta que actúa sobre la masa es

$$\text{Fuerza neta} = F - kx - c\frac{dx}{dt}$$

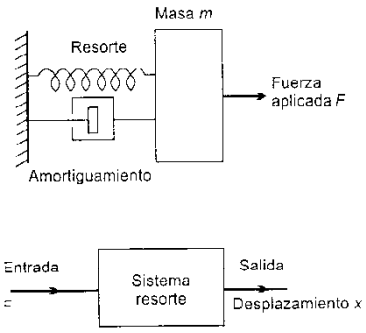


Figura 3.10 Un sistema resorte de segundo orden

Esta fuerza neta hace que la masa m adquiera una aceleración a (segunda ley de Newton). De este modo

$$F - kx - c\frac{dx}{dt} = ma$$

Pero la aceleración es la razón de cambio de la velocidad dv/dt y la velocidad v es la razón de cambio del desplazamiento x, es decir, dx/dt. Así

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(dx/dt)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Por lo tanto

$$F - kx - c\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

o, cuando se reordena

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F$$

Ésta es una ecuación diferencial de segundo orden de un sistema que tuvo una abrupta aplicación de la fuerza F, es decir, una entrada

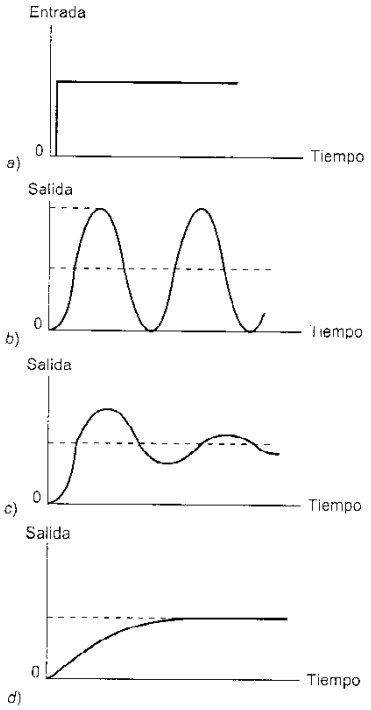


Figura 3.11 Tipos de variación de la salida con el tiempo *a*) para una entrada escalón con *b*) no amortiguamiento, *c*) algún amortiguamiento, *d*) amortiguamiento alto

escalón. La forma en que el desplazamiento resultante x variará con el tiempo dependerá de la cantidad de amortiguamiento en el sistema. Si no hubiera amortiguamiento, entonces la masa oscilaría libremente sobre el resorte y las oscilaciones continuarían de manera indefinida. No tener amortiguamiento significa $c\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$. No obstante, el amortiguamiento causará oscilaciones que desaparecen hasta que se obtiene el desplazamiento estable de la masa. Si el amortiguamiento es lo suficientemente grande no habrá oscilaciones y el desplazamiento de la masa se incrementará lentamente con el tiempo y la masa se moverá en forma gradual hacia su posición de desplazamiento estable (figura 3.11)

Otro ejemplo de sistema de segundo orden es un circuito *RLC* en serie (figura 3.12). Para tal circuito, cuando está sujeto a una entrada escalón de magnitud V en $t = 0$, la corriente i está dada por

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i = \frac{V}{LC}$$

El amortiguamiento en el circuito *RLC* está provisto por la resistencia. En ausencia de ésta, la corriente del circuito oscilará libremente y continuará de manera indefinida. Entonces el término $(R/L)\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ es cero. No obstante, la presencia de la resistencia causará oscilaciones que desaparecen hasta que se obtiene la corriente estable. Sin embargo, si la resistencia, es decir, el amortiguamiento, es lo suficientemente grande no habrá oscilaciones. La corriente se incrementará poco a poco con el tiempo y de manera gradual se moverá hacia el valor estable de la corriente. Las gráficas de la variación de corriente con el tiempo son tal como se muestran en la figura 3.11, para la variación del desplazamiento del resorte con el tiempo para diferentes grados de amortiguamiento.

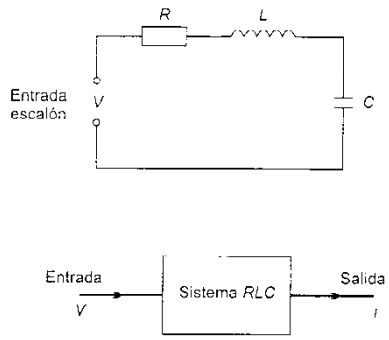


Figura 3.12 Circuito *RLC* en serie

La ecuación diferencial de segundo orden

Una ecuación de segundo orden tiene la forma general

$$a_2 \frac{\mathrm{d}^2\theta_o}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}\theta_o}{\mathrm{d}t} + a_0\theta_o = b_0\theta_i \qquad [16]$$

donde b_0, a_0, a_1 y a_2 son constantes.

En ausencia de cualquier tipo de amortiguamiento la salida de un sistema de segundo orden es una oscilación continua, la cual se puede describir mediante la ecuación

$$\theta_o = A \operatorname{sen} \omega_n t$$

donde A es la amplitud de la oscilación y ω_n es la frecuencia angular de las oscilaciones libres no amortiguadas. Al diferenciar ésta se obtiene

$$\frac{d\theta_o}{dt} = \omega_n A \cos \omega_n t$$

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} = -\omega_n^2 A \operatorname{sen} \omega n t = -\omega_n^2 \theta_o$$

así, la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + \omega_n^2 \theta_o = 0$$

La ecuación diferencial de segundo orden general normalmente se escribe como

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{d\theta_o}{dt} + \omega_n^2 \theta_o = b_0 \omega_n^2 \theta_i \qquad [17]$$

donde ω_n es la frecuencia angular con la cual el sistema oscilará libre en ausencia de cualquier tipo de amortiguamiento y ζ es el *factor de amortiguamiento relativo*. Cuando ζ es cero se tienen oscilaciones libres, situación que describe la figura 3.11*b*; cuando ζ es menor que 1 se tiene la situación de la figura 3.11*c*; y cuando ζ es mayor que 1 la situación es la de la figura 3.11*d*. Las razones de esto se presentan en la siguiente sección de este capítulo.

Solución de una ecuación diferencial de segundo orden

Una ecuación diferencial de segundo orden se puede resolver mediante el método antes descrito para la ecuación diferencial de primer orden. Así, si se sustituye θ_o

$$\theta_o = \underbrace{u}_{\text{Respuesta transitoria}} + \underbrace{v}_{\text{Respuesta forzada}}$$

entonces para u

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{du}{dt} + \omega_n^2 u = 0 \qquad [18]$$

y para v

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dv}{dt} + \omega_n^2 v = \omega_n^2 b_0 \theta_i \qquad [19]$$

Para resolver la ecuación transitoria se puede probar una solución de la forma

$$u - Ae^{st}$$

Con dicha solución

$$\frac{du}{dt} = Ase^{st}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = As^2 e^{st}$$

Así la ecuación (18) se convierte en

$$As^2e^{st} + 2\zeta\omega_n Ase^{st} + \omega_n^2 Ae^{st} = 0$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \qquad [20]$$

De esta manera, $u = Ae^{st}$ puede ser una solución probada si la ecuación anterior es igual a 0. Esta ecuación se denomina *ecuación auxiliar*. Las raíces de la ecuación se pueden obtener factorizando o usando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

donde a, b y c son las constantes en una ecuación de la forma $(ax^2 + bx + c) = 0$. Así, en el contexto de las constantes dadas en la ecuación (20)

$$s = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2)}}{2}$$

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)} \qquad [21]$$

Los valores de s que se obtienen a partir de la ecuación anterior dependen en gran medida del valor del término con el radical (raíz cuadrada). De esta manera, cuando ζ^2 es mayor que 1, el término con el radical da una raíz cuadrada de un número positivo, y cuando ζ^2 es menor que 1 se tiene la raíz cuadrada de un número negativo. El factor de amortiguamiento relativo es crucial, ya que determina si el número al que se extrae raíz cuadrada es positivo o negativo y, por lo tanto, la forma que tendrá la salida del sistema.

Cuando $\zeta > 1$, entonces hay dos raíces reales diferentes s_1 y s_2, donde

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)}$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)}$$

y así la solución general para u es

$$u = A\exp s_1 t + B\exp s_2 t \qquad [22]$$

En estas condiciones se dice que el sistema está *sobreamortiguado*.

Cuando $\zeta = 1$ hay dos raíces reales iguales con $s_1 = s_2 = -\omega_n$. En esta condición, se dice que el sistema está *críticamente amortiguado*,

$$u = (At + B)\exp - \omega_n t \qquad [23]$$

Podría parecer que la solución en este caso sería $u = Ae^{st}$, pero tal solución, con una sola constante A, no satisface las condiciones iniciales para un sistema de segundo orden.

Cuando $\zeta < 1$ hay dos raíces complejas puesto que ambas involucran a $\sqrt{(-1)}$. De esta manera, la ecuación (21) se puede escribir como

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)}$$

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{(-1)(1 - \zeta^2)}$$

y así, escribiendo j en lugar de $\sqrt{(-1)}$

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{(1 - \zeta^2)}$$

Si se hace

$$\omega = \omega_n\sqrt{(1 - \zeta^2)} \qquad [24]$$

entonces

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega$$

y de este modo, las dos raíces son

$$s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n - j\omega$$

El término ω es la frecuencia angular del movimiento cuando está en la condición amortiguada especificada por ζ. La solución en estas condiciones es

$$u = A\exp(-\zeta\omega_n + j\omega)t + B\exp(-\zeta\omega_n + j\omega)t$$

$$u = \exp(-\zeta\omega_n t)[A\exp(j\omega t) + B\exp(-j\omega t)]$$

Pero

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\text{sen}\,\omega t$$

y

$$e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\text{sen}\,\omega t$$

Por lo tanto

$$u = \exp(-\zeta\omega_n t)(A\cos\omega t + jA\,\text{sen}\,\omega t + B\cos\omega t - jB\,\text{sen}\,\omega t)$$

$$u = \exp(-\zeta\omega_n t)[(A + B)\cos\omega t + j(A - B)\text{sen}\,\omega t]$$

Si se sustituyen las constantes P y Q para $(A + B)$ y $j(A - B)$, entonces

$$u = \exp(-\zeta\omega_n t)(P\cos\omega t + Q\,\text{sen}\,\omega t) \qquad [25]$$

En tales condiciones se dice que el sistema está *subamortiguado*.

Para resolver la ecuación forzada (18) se considera una forma particular de la señal de entrada y de esta manera se prueba una solución. Así, para una entrada escalón de magnitud θ_i en el tiempo $t = 0$, se puede probar una solución de la forma

$$v = k$$

donde k es una constante (vea el análisis de la solución de las ecuaciones diferenciales de primer orden en referencia a la elección de soluciones). Para tales soluciones

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

y

$$\frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

así la ecuación (19) se convierte en

$$0 + 0 + \omega_n^2 k = b_0 \omega_n^2 \theta_i$$

De este modo

$$v = b_0 \theta_i$$

La solución completa es, de esta manera, la suma de u y v, es decir, la respuesta transitoria más la forzada. Así, para el sistema sobreamortiguado

$$\theta_o = A \exp s_1 t + B \exp s_2 t + b_0 \theta_i \qquad [26]$$

para el sistema críticamente amortiguado

$$\theta_o = (At + B) \exp - \omega_n t + b_0 \theta_i \qquad [27]$$

y para el sistema subamortiguado

$$\theta_o = \exp(-\zeta \omega_n t)(P \cos \omega t + Q \operatorname{sen} \omega t) + b_0 \theta_i \qquad [28]$$

Cuando $t \to \infty$ entonces las tres ecuaciones anteriores tienden a la solución $\theta_o = b_0 \theta_i$. De esta manera

$$\text{Función de transferencia en estado estable } G_{SS} = \frac{\theta_o}{\theta_i} = b_0 \qquad [29]$$

La figura 3.13 describe las gráficas de la salida como función del tiempo para diferentes grados de amortiguamiento, es decir, diferentes valores de factor de amortiguamiento relativo ζ. El eje de tiempo es $\omega_n t$. Esto se hace para que las gráficas se ajusten a cualquier sistema de segundo orden sin considerar el valor de ω_n. En consecuencia, los valores de $\theta_o = 0$ se dan en el caso de oscilaciones no amortiguadas para $\omega_n t = 0, 2\pi, 4\pi$, etcétera y los valores de $\theta_o = 2$ en $\pi, 3\pi$, etcétera.

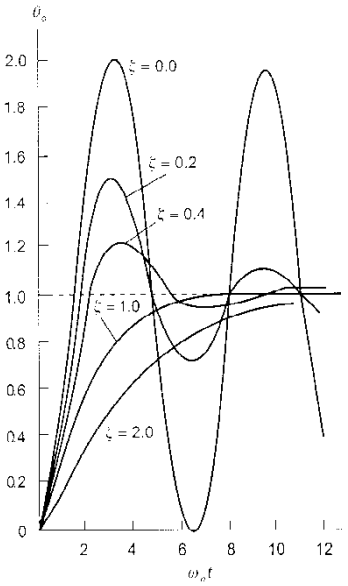


Figura 3.13 Respuestas de un sistema de segundo orden a una entrada escalón

Ejemplo 6

Un circuito *RLC* en serie como el que ilustra la figura 3.12, tiene $R = 100\,\Omega$, $L = 2.0\,\text{H}$ y $C = 20\,\mu\text{F}$. La corriente i en el circuito está dada por

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{V}{LC}$$

cuando se aplica una entrada escalón de magnitud V.

a) ¿Cuál es la frecuencia natural del circuito?

b) ¿El sistema está sobreamortiguado, críticamente amortiguado o subamortiguado?

c) ¿Cuál es la frecuencia de oscilación amortiguada?

d) ¿Cuál es la solución de la ecuación diferencial, si cuando $t = 0$ se tiene $\theta_o = 0$ y $d\theta_o / dt = 0$?

Respuesta

a) Al comparar la ecuación anterior con la ecuación (17) se obtiene

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{d\theta_o}{dt} + \omega_n^2\theta_o = b_i\omega_n^2\theta_o$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{2.0 \times 20 \times 10^{-6}}$$

$$\omega_n = 158 \text{ Hz}$$

b) Al compar una vez más con la ecuación (17) se tiene

$$2\zeta\omega_n = \frac{R}{L} = \frac{100}{2.0}$$

De este modo

$$\zeta = \frac{50}{2 \times 158} = 0.16$$

Como ζ es menor que 1, el sistema está subamortiguado.

c) La frecuencia de oscilación amortiguada ω está dada por la ecuación (24) como

$$\omega = \omega_n(1 - \zeta^2) = 158\sqrt{(1 - 0.026)} = 156 \text{ Hz}$$

d) Debido a que el sistema está subamortiguado, la solución será de la forma dada por la ecuación (28)

$$\theta_o = \exp(-\zeta\omega_n t)(P\cos\omega t + Q\,\text{sen}\,\omega t) + b_0\theta_i$$

Puesto que $\theta_o = 0$ cuando $t = 0$, entonces

$$0 = 1(P + 0) + b_0\theta_i$$

De este modo, $P = -b_0\theta_i$.

Puesto que $d\theta_o/dt = 0$ cuando $t = 0$, entonces, y debido a que $d(uv)/dt = u\,dv/dt + v\,du/dt$

$$\frac{d\theta_o}{dt} = \exp(-\zeta\omega_n t)(\omega P\,\text{sen}\,\omega t - \omega Q\cos\omega t)$$

$$-\zeta\omega_n\exp(-\zeta\omega_n t)(P\cos\omega t + Q\cos\omega t)$$

$$0 = 1(0 - \omega Q) - \zeta\omega_n(P + 0)$$

$$Q = \zeta(\omega_n/\omega)(-b_0\theta_i)$$

Así

$$\theta_o = \exp(-\zeta\omega_n t)[-b\theta_i\cos\omega t - \zeta(\omega_n/\omega)\theta\,] - b_0\theta_i$$

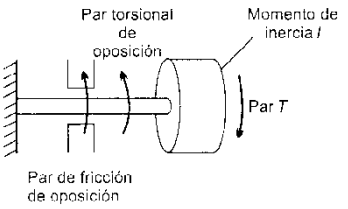


Figura 3.14 Ejemplo 7

Puesto que $\omega_n = 158$ Hz, $\zeta = 0.16$, $\omega = 156$ Hz, $b_0 = 1$ y $\theta_i = V$, entonces

$$\theta_o = -V \exp(-25t)[\cos 156t + 0.16 \operatorname{sen} 156t] + V$$

Ejemplo 7

Existen diversos sistemas que involucran la deformación de un eje como resultado de alguna entrada. La figura 3.14 muestra este sistema básico. La entrada, un par T, se aplica a un disco con momento de inercia I alrededor del eje de rotación. El eje puede girar libremente en la unión con el disco, pero está fijo en el otro extremo. La rotación encuentra oposición por la rigidez torsional del eje, el par de oposición es $k\theta_o$ que se genera por una rotación θ_o, donde k es una constante. Las fuerzas de fricción amortiguan la rotación del eje y producen un par de oposición de $c\mathrm{d}\theta_o/\mathrm{d}t$, donde c es una constante y $\mathrm{d}\theta_o/\mathrm{d}t$ es la razón a la cual cambia el desplazamiento angular de entrada con el tiempo.

a) ¿Cuál es el par neto que actúa sobre el eje cuando existe un desplazamiento angular de entrada de θ_o?

b) Un par neto produce una aceleración angular de $I\mathrm{d}^2\theta_o/\mathrm{d}t^2$. Por consiguiente, escriba la ecuación diferencial para este sistema.

c) ¿Cuál es la condición para que este sistema esté críticamente amortiguado?

Respuesta

a) El par neto es

$$\text{Par neto} = T - c\frac{\mathrm{d}\theta_o}{\mathrm{d}t} - k\theta_o$$

b) El par neto es $I\mathrm{d}^2\theta_o/\mathrm{d}t$, por lo tanto

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta_o}{\mathrm{d}t^2} = T - c\frac{\mathrm{d}\theta_o}{\mathrm{d}t} - k\theta_o$$

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta_o}{\mathrm{d}t^2} + c\frac{\mathrm{d}\theta_o}{\mathrm{d}t} + k\theta_o = T$$

c) La condición para amortiguamiento crítico está dada por el factor de amortiguamiento relativo $\zeta = 1$. Al comparar la ecuación anterior con la ecuación (17)

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta_o}{\mathrm{d}t^2} + 2\zeta\omega_n\frac{\mathrm{d}\theta_o}{\mathrm{d}t} + \omega_n^2\theta_o = b_1\omega_n^2\theta_i$$

Entonces

$$\omega_n^2 = \frac{k}{I}$$

y

$$2\zeta\omega_n = \frac{c}{I}$$

De este modo

$$\zeta = \frac{c}{2\omega_n I} = \frac{c}{2I\sqrt{(k/I)}} = \frac{c}{2\sqrt{(kI)}}$$

Así, el amortiguamiento crítico significa que se debe tener

$$c = 2\sqrt{(kI)}$$

Ejemplo 8

La salida θ_o de un sistema de segundo orden varía con el tiempo cuando está sujeto a una entrada escalón θ_i de acuerdo con la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 4\frac{d\theta_o}{dt} + 4 = 4\theta_i$$

¿Cuál es *a*) la frecuencia angular no amortiguada, *b*) el factor de amortiguamiento relativo y *c*) la solución de la ecuación diferencial cuando hay una entrada escalón θ_i en $t = 0$, se tiene además que $\theta_o = 0$ y $d\theta_o/dt = 0$?

Respuesta

a) Al comparar la ecuación anterior con la ecuación (17) se obtiene

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{d\theta_o}{dt} + \omega_n^2\theta_o = b_1\omega_n^2\theta_i$$

$$\omega_n^2 = 4$$

$$\omega_n = 2 \text{ Hz}$$

b) Si se compara una vez más la ecuación diferencial con la ecuación (17)

$$2\zeta\omega_n = 4$$

$$\zeta = 1.0$$

El sistema es críticamente amortiguado.

c) La solución a un sistema críticamente amortiguado sujeto a una entrada escalón es de la forma dada por la ecuación (27), es decir,

$$\theta_o = (At + B)\exp -\omega_n t + b_0\theta_i$$

Puesto que $\theta_o = 0$ cuando $t = 0$, entonces

$$0 = (0 + B)1 + b_0\theta_i$$

$$B = -b_0\theta_i$$

Dado que $d\theta_o/dt = 0$ cuando $t = 0$, entonces, puesto que $d(uv)/dt = u\,dv/dt + v\,du/dt$,

$$\frac{d\theta_o}{dt} = A\exp -\omega_n t + (At + B)(-\omega_n \exp -\omega_n t)$$

$$0 = A - B\omega_n$$

Por lo tanto, $A = B\omega_n = -\omega_n b_0\theta_i$. De este modo

$$\theta_o = (-\omega_n b_0\theta_i t - b_0\theta_i)\exp -\omega_n t + b_0\theta_i$$

$$\theta_o = -b_0\theta_i(\omega_n t + 1)\exp -\omega_n t + b_0\theta_i$$

Puesto que $\omega_n = 2$ y $b_0 = 1$, entonces

$$\theta_o = -\theta_i(2t + 1)e^{-2t} + \theta_i$$

Ejemplo 9

Un sistema de segundo orden tiene una salida θ_o que varía con el tiempo t cuando está sujeto a una entrada escalón θ_i de acuerdo con la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 13\frac{d\theta_o}{dt} + 36\theta_o = 36\theta_i$$

a) ¿Cuál es la frecuencia angular no amortiguada?
b) ¿Cuál es el factor de amortiguamiento relativo?
c) ¿Cuál es la solución de la ecuación diferencial si cuando $t = 0$ se tiene $\theta_o = 0$ y $d\theta_o / dt = 0$?

Respuesta

a) Al comparar la ecuación anterior con la ecuación (17) se obtiene

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{d\theta_o}{dt} + \omega_n^2\theta_o = b_1\omega_n^2\theta_i \qquad [17]$$

$$\omega_n^2 = 36$$

$$\omega_n = 6 \text{ Hz}$$

b) Si se compara una vez más la ecuación diferencial con la ecuación (17)

$$2\zeta\omega_n = 13$$

$$\zeta = 1.1$$

El sistema está sobreamortiguado.

c) La ecuación de un sistema sobreamortiguado cuando está sujeto a una entrada escalón es de la forma dada por la ecuación (26) como

$$\theta_o = A\exp s_1 t - B\exp s_2 t + b_0\theta_i$$

s_1 y s_2 son las raíces de la ecuación auxiliar que se obtiene al reemplazar $d^2\theta_o/dt^2$ por s^2, $d\theta_o/dt$ por s e igualar la entrada a 0. De este modo

$$s^2 + 13s + 36 = 0$$

$$(s+3)(s+12) = 0$$

Así, $s = -3$ o -12. Por lo tanto

$$\theta_o = Ae^{-3t} + Be^{-12t} + b_0\theta_i$$

Puesto que $\theta_o = 0$ cuando $t = 0$, entonces

$$0 = A + B + b_0\theta_i$$

Debido a que $d\theta_o / dt = 0$ cuando $t = 0$, entonces

$$\frac{d\theta_o}{dt} = -3Ae^{-3t} - 12Be^{-12t}$$

$$0 = -3A - 12B$$

De esta manera, $A = -4B$ y así $A = -(4/3)b_0\theta_i$ y $B = (1/3)b_0\theta_i$. Por lo tanto, puesto que $b_0 = 1$

$$\theta_o = \theta_i[(1/3)e^{-3t} - (4/3)e^{-12t} + 1]$$

Medidas de desempeño para sistemas de segundo orden

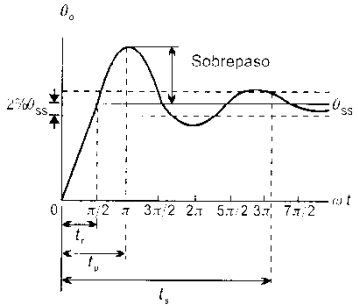


Figura 3.15 Respuesta escalón para un sistema no amortiguado

La figura 3.15 ilustra la forma típica de la respuesta de un sistema subamortiguado a una entrada escalón. Se emplean algunos términos para especificar tal desempeño.

El *tiempo de levantamiento* t_r es el tiempo que toma a la respuesta θ_o levantarse desde 0 hasta el valor en estado estable θ_{SS}, y es la medida de qué tan rápido el sistema responde a una entrada. Éste es el tiempo para que la respuesta oscilatoria complete un cuarto de ciclo, es decir, $\frac{1}{2}\pi$. De este modo

$$\omega t_r = \tfrac{1}{2}\pi \qquad [30]$$

En ocasiones, el tiempo de levantamiento se especifica como el tiempo que toma a la respuesta levantarse desde algún porcentaje especificado del valor en estado estable, por ejemplo 10% a otro porcentaje especificado, por ejemplo 90%.

El *tiempo pico* t_p es el tiempo que toma a la respuesta levantarse desde 0 hasta el primer valor pico. Éste es el tiempo para que la respuesta oscilatoria complete medio ciclo, es decir, π . Así

$$\omega t_p = \pi \qquad [31]$$

El *sobrepaso* es la máxima cantidad que adquiere la respuesta por encima del valor en estado estable. Ésta es, así, la amplitud del primer pico. Con frecuencia, el sobrepaso se escribe como un porcentaje del valor en estado estable.

La ecuación (28) proporciona la variación de la respuesta con el tiempo

$$\theta_o = \exp(-\zeta\omega_n t)(P\cos\omega t + Q\,\text{sen}\,\omega t) + b_0\theta_i$$

Puesto que $\theta_o = 0$ cuando $t = 0$, entonces

$$0 = 1(P + 0) + b_0\theta_i$$

$$P = -b_0\theta_i$$

Pero $b_0\theta_i$ es el valor en estado estable θ_{SS}. De esta manera

$$\theta_o = \exp(-\zeta\omega_n t)(\theta_{SS}\cos\omega t + Q\,\text{sen}\,\omega t) + \theta_{SS} \qquad [32]$$

El sobrepaso se presenta en $\omega t = \pi$, así

$$\theta_o = \exp(-\zeta\omega_n\pi/\omega)(\theta_{SS} + 0) + \theta_{SS}$$

El sobrepaso es la diferencia entre la salida en ese tiempo y el valor en estado estable. Por lo tanto

$$\text{Sobrepaso} = \theta_{SS}\exp(-\zeta\omega_n\pi/\omega)$$

Debido a que la ecuación (24) da

$$\omega = \omega_n\sqrt{(1-\zeta^2)}$$

entonces

$$\text{Sobrepaso} = \theta_{SS}\exp\left(\frac{-\zeta\omega_n\pi}{\omega_n\sqrt{(1-\zeta^2)}}\right)$$

$$\text{Sobrepaso} = \theta_{SS} \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}\right) \qquad [33]$$

Expresado como un porcentaje de θ_{SS},

$$\text{Sobrepaso en porcentaje} = \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}\right) \times 100\% \qquad [34]$$

En la tabla 3.2 se dan los valores del sobrepaso en porcentaje para algunos factores de amortiguamiento relativo en particular.

Tabla 3.2 Sobrepaso pico en porcentaje

Factor de amortiguamiento relativo	0.2	0.4	0.6	0.8
Sobrepaso en porcentaje	52.7	25.4	9.5	1.5

Una indicación de qué tan rápido decaen las oscilaciones la proporciona la *razón de asentamiento* o *decremento*. Es decir, la amplitud del segundo sobrepaso dividida entre la amplitud del primer sobrepaso. El primer sobrepaso se presenta cuando $\omega t = \pi$; el segundo sobrepaso, cuando $\omega t = 2\pi$. Así, la ecuación (33) da para el primer sobrepaso

$$\text{Primer sobrepaso} = \theta_{SS} \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}\right)$$

para el segundo sobrepaso un análisis similar da

$$\text{Segundo sobrepaso} = \theta_{SS} \exp\left(\frac{-2\zeta\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}\right)$$

De este modo, la razón de asentamiento es

$$\text{Razón de asentamiento} = \frac{\text{segundo sobrepaso}}{\text{primer sobrepaso}}$$

$$\text{Razón de asentamiento} = \frac{\theta_{SS} \exp[(-2\zeta\pi/\sqrt{(1-\zeta^2)})]}{\theta_{SS} \exp[(-\zeta\pi/\sqrt{(1-\zeta^2)})]}$$

$$\text{Razón de asentamiento} = \exp[-\zeta\pi/\sqrt{(1-\zeta^2)}] \qquad [35]$$

El *tiempo de asentamiento* t_s se emplea como una medida del tiempo que toman las oscilaciones en desaparecer. Éste es el tiempo que toma a la respuesta decaer y mantenerse dentro de un porcentaje especificado, por ejemplo, 2%, alrededor del valor en estado estable (figura 3.15). Esto significa que la amplitud de la oscilación debe ser menor que el 2% de θ_{SS}. La ecuación (32) indica cómo varía la respuesta θ_o con el tiempo

$$\theta_o = \exp(-\zeta\omega_n t)(\theta_{SS} \cos\omega t + Q \operatorname{sen} \omega t) + \theta_{SS}$$

La amplitud de la oscilación es $(\theta_o - \theta_{SS})$, y de este modo

$$\text{Amplitud} = \exp(-\zeta\omega_n t)(\theta_{SS} \cos\omega t + Q \operatorname{sen} \omega t)$$

Los valores máximos de la amplitud se presentan cuando ωt es un múltiplo de π y así $\cos\omega t = 1$ y $\operatorname{sen} \omega t = 0$. El tiempo de asentamiento

t_s es cuando la amplitud máxima es el 2% de θ_{SS}, es decir, $0.02\,\theta_{SS}$. Entonces

$$0.02\,\theta_{SS} - \exp(-\zeta\omega_n t_s)(\theta_{SS} \times 1 + 0)$$

$$0.02 = \exp(-\zeta\omega_n t_s)$$

Tomando logaritmos

$$\ln 0.02 = -\zeta\omega_n t_s$$

$\ln 0.02 = -3.9$ o casi -4. De esta manera

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \qquad [36]$$

La ecuación anterior da el valor del tiempo de asentamiento si el porcentaje especificado es 2%. Si el porcentaje es 5% la ecuación se convierte en

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \qquad [37]$$

Puesto que el tiempo que toma un ciclo completo, es decir, el *periodo*, es $1/f$, donde f es la frecuencia, entonces, puesto que $\omega = 2\pi f$ el tiempo para completar un ciclo es

$$\text{Periodo} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Por lo tanto, en un tiempo de asentamiento t_s el número de oscilaciones que se presentan es

$$\text{Número de oscilaciones} = \frac{\text{tiempo de asentamiento}}{\text{periodo}} \qquad [38]$$

y así, para el tiempo de asentamiento definido para el 2% del valor en estado estable, al combinar las ecuaciones (36) y (38) se obtiene

$$\text{Número de oscilaciones} = \frac{4/\zeta\omega_n}{2\pi/\omega} = \frac{2\omega}{\pi\zeta\omega_n}$$

Puesto que la ecuación (24) da

$$\omega = \omega_n\sqrt{(1-\zeta^2)}$$

entonces

$$\text{Número de oscilaciones} = \frac{2\omega_n\sqrt{(1-\zeta^2)}}{\pi\zeta\omega_n}$$

$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)} \qquad [39]$$

Ejemplo 10

Un sistema de segundo orden tiene una frecuencia angular natural de 2.0 Hz y una frecuencia amortiguada de 1.8 Hz. Para este amortiguamiento, ¿cuál es *a*) el factor de amortiguamiento relativo, *b*) el tiempo de levantamiento de 100%, *c*) el máximo sobrepaso en porcenta-

je, *d*) el tiempo de asentamiento de 2%, y *e*) el número de ciclos de oscilaciones que se presentarán en el tiempo de asentamiento?

Respuesta

a) Puesto que la ecuación (24) da

$$\omega = \omega_n\sqrt{(1-\zeta^2)}$$

$$1.8 = 2.0\sqrt{(1-\zeta^2)}$$

y así $\zeta = 0.44$

b) Debido a que la ecuación (30) da

$$\omega t_r = \tfrac{1}{2}\pi$$

$$t_r = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2\times 1.8} = 0.87\text{s}$$

c) Ya que la ecuación (34) da

$$\text{Sobrepaso en porcentaje} = \exp\left[\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}\right]\times 100\,\%$$

$$= \exp\left[\frac{-0.44\pi}{\sqrt{(1-0.44^2)}}\right]\times 100\,\%$$

$$= 21\,\%$$

d) El tiempo de asentamiento de 2% está dado por la ecuación (36) como

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.44\times 2.0} = 4.5\text{s}$$

e) La ecuación (39) da, para un tiempo de asentamiento de 2%

$$\text{Número de oscilaciones} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\left(\frac{1}{\zeta^2}-1\right)}$$

$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{\left(\frac{1}{0.44^2}-1\right)} = 1.3$$

Ejemplo 11

La estructura de una antena de televisión está sujeta a oscilaciones torsionales cuando se tiene un par de entrada; esta entrada es un escalón provista por una súbita ráfaga de viento. La ecuación diferencial para la estructura es

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta_o}{\mathrm{d}t^2} + 5\frac{\mathrm{d}\theta_o}{\mathrm{d}t} + 100\theta_o = 100\theta_i$$

¿Cuál es, para la estructura, el tiempo de asentamiento de 2%?

Respuesta

Al comparar la ecuación diferencial con la ecuación (17), es decir,

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta_o}{\mathrm{d}t^2} + 2\xi\omega_n\frac{\mathrm{d}\theta_o}{\mathrm{d}t} + \omega_n^2\theta_o = b_1\omega_n^2\theta_i$$

entonces, $2\xi\omega_n = 5$. Pero el tiempo de asentamiento de 2% está dado por la ecuación (36) como

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{5/2} = 1.6\text{ s}$$

Ejemplo 12

Un sistema de segundo orden tiene un sobrepaso de 10% y un tiempo de levantamiento de 0.4 s cuando está sujeto a una entrada escalón. ¿Cuál es *a*) el factor de amortiguamiento relativo, *b*) la frecuencia angular amortiguada, *c*) la frecuencia angular no amortiguada?

Respuesta

a) El sobrepaso en porcentaje está dado por la ecuación (34) como

$$\text{Sobrepaso en porcentaje} = \exp\left[\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}\right] \times 100\,\%$$

Así

$$0.10 = \exp\left[\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}\right]$$

$$\ln 0.10 = \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}$$

$$-2.3\sqrt{(1-\zeta^2)} = -\zeta\pi$$

$$5.3(1-\zeta^2) = 9.9\zeta^2$$

Por lo tanto, $\zeta = 0.6$.

b) Usando la ecuación (30)

$$\omega t_r = \tfrac{1}{2}\pi$$

$$\omega = \frac{\pi}{2\times 0.4} = 3.9\text{ Hz}$$

c) Puesto que la ecuación (24) da

$$\omega = \omega_n\sqrt{(1-\zeta^2)}$$

$$\omega_n = \frac{3.9}{\sqrt{(1-0.6^2)}} = 4.9\text{ Hz}$$

El operador D y los sistemas de segundo orden

Una ecuación diferencial de segundo orden, como la ecuación (11)

$$a_2\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + a_1\frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b_0\theta_i$$

se puede escribir con los operadores D como

$$a_2D^2\theta_o + a_1D\theta_o + a_0\theta_o = b_0\theta_i$$

$$(a_2D^2 + a_1D + a_0)\theta_o = b_0\theta_i$$

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{b_0}{a_2D^2 + a_1D + a_0} \qquad [40]$$

La ecuación diferencial de segundo orden, la ecuación (17)

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{d\theta_o}{dt} + \omega_n^2\theta_o = b_1\omega_n^2\theta_i$$

se puede escribir con los operadores D como

$$D^2\theta_o + 2\zeta\omega_n D\theta_o + \omega_n^2\theta_o = b_1\omega_n^2\theta_i$$

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{b_1\omega_n^2}{D^2 + 2\zeta\omega_n D + \omega_n^2} \qquad [41]$$

Estas ecuaciones se pueden resolver con el mismo enfoque que se adoptó para las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Ejemplo 13

Un sistema se puede representar mediante

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{1}{(D+2)(D+5)}$$

¿Cuál es la frecuencia angular no amortiguada y el factor de amortiguamiento relativo para el sistema?

Respuesta

La ecuación se puede reordenar para obtener

$$D^2\theta_o + 7D\theta_o + 10\theta_o = \theta_i$$

Esta última ecuación se puede comparar con la ecuación (17)

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{d\theta_o}{dt} + \omega_n^2\theta_o = b_1\omega_n^2\theta_i$$

$$D^2\theta_o + 2\zeta\omega_n^2 D\theta_o + \omega_n^2\theta_o = b_1\theta_i$$

De este modo, $\omega_n^2 = 10$ y así $\omega_n = 3.2$ Hz, y $2\zeta\omega_n = 7$ y de este modo $\zeta = 1.1$.

Problemas

1 Dar ejemplos de un sistema de primer orden y uno de segundo orden, en los que se incluya la forma de sus ecuaciones diferenciales.

2 Un sistema de primer orden tiene una salida v que varía con el tiempo t de acuerdo con

$$v = V(1 - e^{-3t})$$

donde V es el valor en estado estable de la salida. ¿Cuál es la ecuación diferencial?

3 Un sistema de primer orden tiene una constante de tiempo de 4 s y una función de transferencia en estado estable de 6. ¿Cuál es la forma de la ecuación diferencial para este sistema?

4 Un termómetro de mercurio tiene una constante de tiempo de 10 s. Si éste se toma súbitamente de un ambiente a 20 °C y se sumerge en agua a 80 °C, ¿cuál será la temperatura que indica el termómetro después de *a*) 10 s, *b*) 20 s?

5 Un circuito consta de un resistor R en serie con un inductor L. Cuando está sujeto a una entrada escalón de voltaje V en el tiempo $t = 0$ la ecuación diferencial para el sistema es

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{V}{L}$$

¿Cuál es *a*) la solución para esta ecuación diferencial, *b*) la constante de tiempo, *c*) la corriente i en estado estable?

6 ¿Cuáles son las constantes de tiempo y las funciones de transferencia en estado estable para los sistemas de primer orden descritos mediante las siguientes ecuaciones?

a) $0.6\,D\theta_o + \theta_o = \theta_i$

b) $\dfrac{\theta_o}{\theta_i} = \dfrac{2}{D+5}$

c) $(D+3)\theta_o = 2\theta_i$

7 Describa la forma de la variación de salida con el tiempo para una entrada escalón de un sistema de segundo orden con un factor de amortiguamiento relativo de *a*) 0, *b*) 0.5, *c*) 1.0, *d*) 1.5.

8 Un circuito *RLC* tiene una corriente i que varía con el tiempo t cuando está sujeta a una entrada escalón de θ_i de acuerdo con la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 10\frac{di}{dt} + 16i = 16\theta_i$$

¿Cuál es *a*) la frecuencia no amortiguada, *b*) el factor de amortiguamiento relativo, *c*) la solución de la ecuación diferencial si $i = 0$ cuando $t = 0$ y $di/dt = 0$ cuando $t = 0$?

9 Un sistema tiene una salida θ_o que varía con el tiempo t de acuerdo con la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 10\frac{d\theta_o}{dt} + 25 = 25\theta_i$$

¿Cuál es *a*) la frecuencia no amortiguada, *b*) el factor de amortiguamiento relativo, *c*) la solución de la ecuación diferencial si $\theta_o = 0$ cuando $t = 0$ y $d\theta_o/dt = -2$ cuando $t = 0$ y hay una entrada escalón de magnitud 3 unidades?

10 Un acelerómetro (instrumento para medir la aceleración) tiene una frecuencia angular no amortiguada de 100 Hz y un factor de amortiguamiento relativo de 0.6. ¿Cuál será *a*) el máximo sobrepaso en porcentaje y *b*) el tiempo de levantamiento cuando hay un cambio súbito en la aceleración?

11 ¿Cuál será *a*) la frecuencia angular no amortiguada, *b*) el factor de amortiguamiento relativo, *c*) la frecuencia angular amortiguada, *d*) el tiempo de levantamiento, *e*) el máximo sobrepaso en porcentaje y *f*) el tiempo de asentamiento de 0.2% para un sistema dado por la siguiente ecuación diferencial?

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 5\frac{d\theta_o}{dt} + 16 = 16\theta_i$$

12 Cuando un voltaje de 10 V se aplica de manera súbita a un voltímetro de bobina móvil se observa que el apuntador del instrumento sube hasta 11 V antes de que el valor real se asiente en 10 V. ¿Cuál es *a*) el factor de amortiguamiento relativo y *b*) el número de oscilaciones del apuntador antes de que esté dentro del 0.2% de su valor en estado estable?

4 Transformadas de Laplace

Introducción

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE LERDO BIBLIOTECA

La *transformada de Laplace* es un método que transforma una ecuación diferencial en una ecuación algebraica más fácil de resolver. En este capítulo se presenta la transformada de Laplace y se estudia su utilización en la resolución de problemas que de otro modo requeriría la solución de ecuaciones diferenciales.

Para ayudar a situar el concepto de transformada matemática de manera objetiva, un ejemplo sencillo de transformación matemática es cuando el problema de multiplicación se cambia por la simple operación de adición mediante la *transformación logarítmica* (figura 4.1). La multiplicación de B por C para dar A,

$$A = BC$$

se puede transformar, mediante el uso de logaritmos, en

$$\log A = \log BC = \log B + \log C$$

Podemos entonces sumar $\log B$ y $\log C$ para obtener el número D. De esta manera

$$\log A = D$$

Para encontrar el valor de A se debe realizar la operación logaritmo inverso o antilogaritmo

$$A = \text{antilog } D$$

La *transformada de Laplace* es un tipo similar de operación matemática a esta transformación logarítmica (figura 4.2). La ecuación diferencial que describe cómo se comporta un circuito con el tiempo se transforma en relaciones algebraicas sencillas, que no involucran el tiempo, donde es posible realizar las manipulaciones algebraicas normales de las cantidades. Se dice que el comportamiento del circuito en el *dominio del tiempo* se transforma al *dominio de s*, en el cual se pueden realizar manipulaciones algebraicas. Entonces se uti-

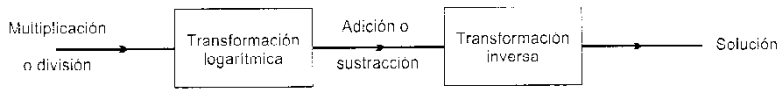


Figura 4.1 La transformación logarítmica

liza una transformada inversa, como el antilogaritmo, a fin de obtener la solución que describe cómo la señal varía con el tiempo, es decir, se transforma de regreso del dominio de s al dominio del tiempo.

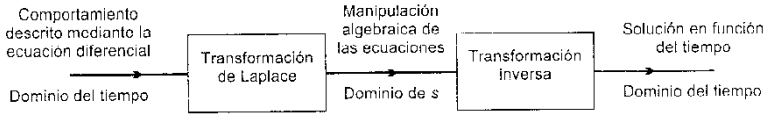


Figura 4.2 La transformación de Laplace

La transformación de Laplace

El matemático francés P. S. de Laplace (1749-1827) descubrió una forma de resolver ecuaciones diferenciales: multiplicar cada término de la ecuación por e^{-st} y, así, integrar cada uno de esos términos respecto al tiempo desde cero hasta infinito; s es una constante con unidades de 1/tiempo. El resultado es lo que hoy día se conoce como la *transformada de Laplace*. De este modo, la transformada de Laplace de algún término que es función del tiempo es

$$\int_0^\infty (\text{term})\, e^{-st}\, dt$$

Debido a que el término es una función del tiempo, es usual escribirla como $f(t)$ con la transformada de Laplace; puesto que ésta es una función de s, se escribe como $F(s)$. Es muy común usar la letra mayúscula F para la transformada de Laplace y la letra minúscula f para la función del tiempo $f(t)$. Así

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt \qquad [1]$$

Para ilustrar el uso de la notación de funciones, considere un resistor R a través del cual circula una corriente i y la diferencia de potencial v. En general, se escribiría

$$v = Ri$$

Puesto que tanto v como i son funciones del tiempo, esto se podría indicar de manera ideal, al escribir la ecuación como

$$v(t) = Ri(t)$$

El símbolo (t) no indica que el término precedente deba multiplicarse por t, sino que ese término es una función del tiempo, es decir, su valor depende de qué tiempo se considere.

Si se toman las transformadas de Laplace de i y v la ecuación se convierte en

$$V(s) = RI(s)$$

$V(s)$ indica que el término es la transformada de Laplace de $v(t)$; de modo similar $I(s)$ indica que el término es la transformada de Laplace de $i(t)$. La (s) no indica que el término precedente deba multiplicarse por s.

La transformada de Laplace para una función escalón

Para ilustrar cómo una transformada de Laplace se puede desarrollar a partir de los primeros principios, considere una función escalón. Esta función se describe como un cambio abrupto en alguna cantidad, y con frecuencia se emplea para describir el cambio en la entrada al sistema cuando se hace un cambio súbito en su valor; por ejemplo, el cambio en el voltaje aplicado a un circuito cuando éste se enciende de manera súbita. La figura 4.3 muestra la forma que tomaría una entrada escalón cuando tiene lugar un cambio abrupto en la entrada en el tiempo $t = 0$ y la magnitud del escalón es 1 unidad. La ecuación para esta función es

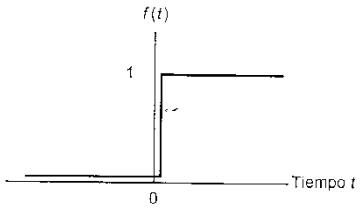


Figura 4.3 Una función escalón de altura 1

$$f(t) = 1$$

para todos los valores de t mayores que 0. Para los valores de t menores que 0 la ecuación es

$$f(t) = 0$$

La transformada de Laplace de esta función escalón, para valores mayores que 0, es, entonces

$$F(s) = \int_0^\infty 1\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

y así

$$F(s) = -\frac{1}{s}\left[\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty$$

Puesto que cuando $t = \infty$, el valor de $\mathrm{e}^{-\infty}$ es 0 y cuando $t = 0$, el valor de e^{-0} es -1, entonces

$$F(s) = \frac{1}{s} \qquad [2]$$

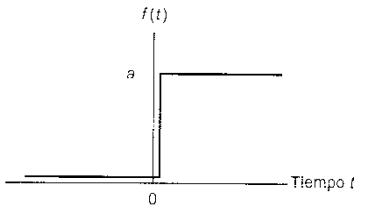


Figura 4.4 Una función escalón de altura a

Suponga ahora que en lugar de una señal de entrada escalón de altura de 1 unidad se tiene uno de una altura de a unidades, como en la figura 4.4. Entonces, para todos los valores de t mayores que 0 se tiene

$$f(t) = a$$

La transformada de Laplace de esta función es

$$F(s) = \int_0^\infty a\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= a\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

Pero esto sólo es a multiplicado por la transformada del escalón unitario. Así

$$F(s) = \frac{a}{s} \qquad [3]$$

La multiplicación de una función del tiempo por una constante a da por resultado una transformada de Laplace, la cual es sólo la multiplicación de la transformada de Laplace de la función por la constante.

Ejemplo 1

Determinar, a partir de los primeros principios, la transformada de Laplace de la función e^{at}, donde a es una constante.

Respuesta

La transformada de Laplace de esta función se obtiene como sigue:

$$f(t) = e^{at}$$

$$\text{Transformada de Laplace} = F(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt$$

Esto se puede simplificar a

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt$$

$$F(s) = -\frac{1}{s-a}\left[e^{-(s-a)t}\right]_0^\infty$$

Cuando $t = \infty$, el término en los corchetes se convierte en 0 y cuando $t = 0$, éste se convierte en -1. De este modo

$$F(s) = \frac{1}{s-a}$$

Empleando transformadas de Laplace

Por fortuna no siempre es necesario evaluar las integrales que se obtienen al realizar la transformada de Laplace, puesto que se dispone de tablas que proporcionan las transformadas de todas las funciones más comunes, que, combinadas con algunas reglas básicas para manipular dichas transformadas, permiten abordar los problemas por resolver.

Las reglas básicas son:

1 La adición de dos funciones se convierte en la adición de sus dos transformadas de Laplace.

$$f_1(t) + f_2(t) \quad \text{se convierte en} \quad F_1(s) + F_2(s)$$

2 La sustracción de dos funciones se convierte en la sustracción de sus dos transformadas de Laplace.

$$f_1(t) - f_2(t) \quad \text{se convierte en} \quad F_1(s) - F_2(s)$$

3 La multiplicación de una función por una constante se convierte en la multiplicación de la transformada de Laplace de la función por la misma constante

$af(t)$ se convierte en $aF(s)$

4 Una función que esté retrasada un tiempo T, es decir, $f(t-T)$, se convierte en $e^{-Ts}F(s)$ para valores de T mayores que o iguales a cero.

5 La primera derivada de una función se convierte en s multiplicada por la transformada de Laplace de la función, menos el valor de $f(t)$ en $t=0$.

$$\frac{d}{dt}f(t) \quad \text{se convierte en} \quad sF(s)-f(0)$$

donde $f(0)$ es el valor de la función en $t=0$.

6 La segunda derivada de una función se convierte en s^2 multiplicada por la transformada de Laplace de la función, menos s multiplicada por el valor de la función en $t=0$, menos el valor de la primera derivada de $f(t)$ en $t=0$.

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) \quad \text{se convierte en} \quad s^2F(s)-sf(0)-\frac{df(0)}{dt}$$

donde $sf(0)$ es s multiplicada por el valor de la función en $t=0$ y $df(0)/dt$ es la primera derivada de la función en $t=0$.

7 La n-ésima derivada de una función se convierte en s^n multiplicada por la transformada de Laplace de la función, menos los términos que involucran los valores de $f(t)$ y sus derivadas en $t=0$.

$$\frac{d^n}{dt^n}f(t) \quad \text{se convierte en} \quad s^nF(s)-s^{n-1}f(0) - \ldots - \frac{d^{n-1}f(0)}{dt^{n-1}}$$

8 La primera integral de una función, entre el tiempo cero y el tiempo t, se convierte en $(1/s)$ multiplicado por la transformada de Laplace de la función.

$$\int_0^{\infty} f(t) \quad \text{se convierte en} \quad \frac{1}{s}F(s)$$

La tabla 4.1 contiene algunas transformadas de Laplace más comunes y sus correspondientes funciones del tiempo.

Ejemplo 2

Determinar, con base en la tabla 4.1, la transformada de Laplace para:

a) Un escalón de voltaje de magnitud 4 V que empieza en $t=0$.
b) Un escalón de voltaje de magnitud 4V que empieza en $t=2$ s.
c) Una rampa de voltaje que empieza en $t=0$ y se incrementa a razón de 3 V/s.
d) Una rampa de voltaje que empieza en $t=2$ s y se incrementa a razón de 3 V/s.

Tabla 4.1 Transformadas de Laplace

Transformada de Laplace	*Función del tiempo*	*Descripción de la función del tiempo*
1		Impulso unitario
$\frac{1}{s}$		Función escalón unitario
$\frac{e^{-st}}{s}$		Función escalón unitario retrasada
$\frac{1-e^{-st}}{s}$		Pulso rectangular de duración T
$\frac{1}{s^2}$	t	Función rampa de pendiente unitaria
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	Decaimiento exponencial
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	
$\frac{2}{(s+a)^3}$	t^2e^{-at}	
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	Crecimiento exponencial
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$t-\frac{(1-e^{-at})}{a}$	
$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-e^{-at}-ate^{-at}$	
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$	
$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$1-\frac{b}{b-a}e^{-at}+\frac{a}{b-a}e^{-bt}$	
$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(c-a)(a-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\operatorname{sen}\omega t$	Onda senoidal
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	Onda cosenoidal
$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\operatorname{sen}\omega t$	Onda senoidal amortiguada
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	Onda cosenoidal amortiguada
$\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$	$1-\cos\omega t$	
$\frac{\omega^2}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}$	$\frac{\omega}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}e^{-\zeta\omega t}\operatorname{sen}[\omega\sqrt{(1-\zeta^2)}t]$	
$\frac{\omega^2}{s(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)}$	$1-\frac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}e^{-\zeta\omega t}\operatorname{sen}[\omega\sqrt{(1-\zeta^2)}t+\phi]$	
con $\zeta<1$	con $\zeta=\cos\phi$	

e) Un impulso de voltaje de magnitud 4 V que empieza en $t = 3$ s.
f) Un voltaje senoidal de amplitud 2 V y frecuencia angular de 10 Hz.

Respuesta

En la figura 4.5 se muestra la forma de las seis funciones, éstas representan formas comunes de señales de entrada a los sistemas.

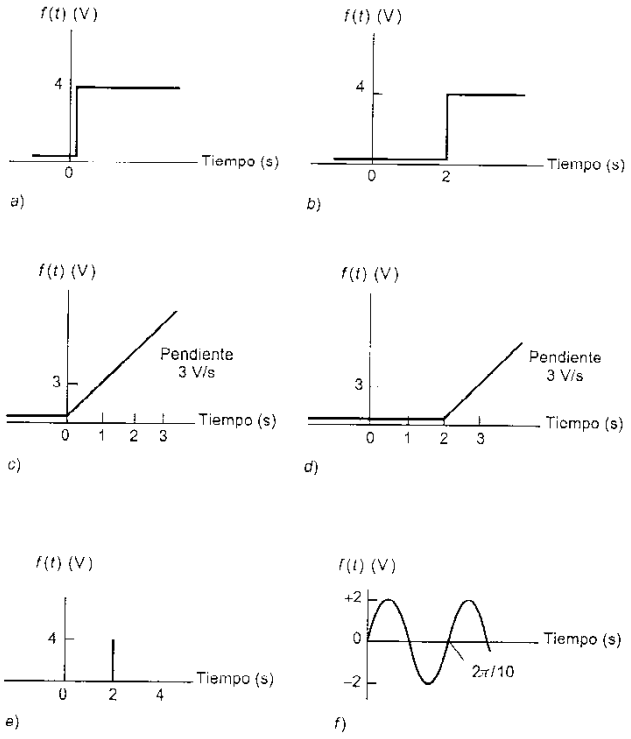


Figura 4.5 *a*) Función escalón, *b*) función escalón retrasada, *c*) función rampa, *d*) función rampa retrasada, *e*) impulso retrasado, *f*) función senoidal

a) El escalón de voltaje es una función de la forma

$$f(t) = a$$

donde a tiene el valor, en este caso, de 4 V. La transformada de Laplace de una función escalón de magnitud 1 es $1/s$ y de este modo la función escalón de magnitud a tiene la transformada de Laplace de

$$F(s) = a \times \frac{1}{s}$$

Por lo tanto

$$F(s) = \frac{4}{s}$$

b) La función escalón en el inciso *a*) se retrasa por 2 s. La transformada de Laplace para una función retrasada es la misma de la función sin retraso, es decir, la función empezando en $t = 0$, pero multiplicada por e^{-sT}. De este modo, la transformada de Laplace es

$$F(s) = \frac{a}{s} e^{-sT} = \frac{4}{s} e^{-2s}$$

c) La función rampa es de la forma

$$f(t) = at$$

donde a tiene el valor de 3 V/s. Debido a que a es una constante, entonces la transformada de Laplace de la función será a multiplicada por la transformada de t, la cual es $1/s^2$. De este modo

$$F(s) = \frac{a}{s^2} = \frac{3}{s^2}$$

d) La función rampa está retrasada un tiempo T, donde $T = 3$ s. La transformada de Laplace para una función retrasada es la misma que la función sin retraso, es decir, la función empezando en $t = 0$, pero multiplicada por e^{-sT}. Así, la transformada de Laplace es

$$F(s) = \frac{a e^{-T/s}}{s^2} = \frac{3 e^{2s}}{s^2}$$

e) La transformada de Laplace de una función impulso que ocurre en $t = 0$ es 1. Para un impulso de 4 V la transformada será 4. Retrasar el impulso significa que la función sin retraso se multiplique por $e^{-T/s}$. De este modo, la transformada de Laplace con $T = 3$ s es

$$F(s) = 4e^{3/s}$$

f) La transformada de Laplace de una función senoidal sen ωt es

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

De este modo, la transformada de Laplace de una función senoidal de amplitud A, es decir, la función A sen ωt, es

$$F(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Así, para una amplitud de 2 V y una frecuencia angular de 10 Hz,

$$F(s) = \frac{20}{s^2 + 100}$$

Ejemplo 3

Obtener, con base en la tabla 4.1, la transformada de Laplace para las siguientes funciones:

a) t^2
b) $t^2 e^{-at}$
c) $t^2(1 + e^{-at})$

Respuesta

a) La tabla da la transformada de Laplace de $\frac{1}{2}t^2$ como $1/s^3$. De esta manera, para obtener la transformada de Laplace de t^2 se debe multiplicar la función de la tabla por 2. Debido a que ésta es una constante, la transformada de Laplace de t^2 será

$$F(s) = \frac{2}{s^3}$$

b) Al emplear la tabla, la transformada es

$$F(s) = \frac{2}{(s+a)^3}$$

Observe que la transformada de Laplace de dos funciones multiplicadas *no* es la multiplicación de sus transformadas de Laplace individuales.

c) La transformada de Laplace de dos funciones sumadas es la suma de las transformadas de Laplace individuales.

$$f(t) = t^2 + t^2 e^{-at}$$

$$F(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{(s-a)^3}$$

Ejemplo 4

A partir de la tabla 4.1, determinar la transformada inversa de Laplace de

a) $\dfrac{2}{s}$

b) $\dfrac{3}{2s+1}$

c) $\dfrac{2}{s-5}$

Respuesta

Utilizar la tabla 4.1 para obtener la transformada inversa significa echar una ojeada para encontrar la transformada de Laplace de la misma forma básica.

a) La tabla incluye una transformada de Laplace de $1/s$ y así, puesto que ésta sólo se multiplica por la constante 2, la transformada inversa será la función que da $1/s$, es decir, 1 multiplicado por la misma constante. Así la transformada inversa es 2.

b) Esta transformada se puede reordenar para dar

$$\frac{(3/2)}{s + (1/2)}$$

La tabla contiene la transformada $1/(s+a)$, la inversa de la cual es e^{-at}. Así, la transformada inversa ésta multiplicada por la constante (3/2) con $a = (1/2)$, es decir, $a = (3/2)e^{-t/2}$.

c) Esta transformada es de la misma forma que en el inciso *b* con $a = -5$. De este modo, la transformada inversa es $2e^{5t}$.

Empleo de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales

Para utilizar la transformada de Laplace en la solución de una ecuación diferencial, se adopta el siguiente procedimiento:

1 Transformar cada término de la ecuación diferencial en su equivalente en transformada de Laplace, es decir, se cambia la función del tiempo en una función de (s).
2 Realizar todas las operaciones algebraicas, por ejemplo, considerar qué pasa cuando al sistema se aplica una entrada escalón.
3 Convertir otra vez la función de Laplace resultante en una ecuación que dé una función del tiempo, es decir, la operación inversa de la transformada de Laplace. A fin de emplear las tablas para hacer la conversión, a menudo es necesario primero realizar una expansión en fracciones parciales para obtener de éstas formas estándares dadas en las tablas (vea adelante en este capítulo).

Ejemplo 5

Emplear la transformada de Laplace para resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$3\frac{dx}{dt} + 2x = 4$$

con $x = 0$ en $t = 0$.

Respuesta

La transformada de Laplace de $3\,dx/dt$ es 3 veces la transformada de Laplace de dx/dt. La transformada de Laplace de $2x$ es 2 veces la transformada de Laplace de x. La transformada de Laplace de 4 es $4/s$, puesto que éste se puede considerar una función escalón de altura 4. De este modo

$$3[sX(s) - x(0)] - 2X(s) = 4/s$$

donde $X(s)$ es la transformada de Laplace de x. Debido a que $x(0) = 0$, entonces

$$3[sX(s) - 0] + 2X(s) = 4/s$$

y así

$$3s^2X(s) + 2sX(s) = 4$$

$$X(s) = \frac{4}{3s^2 + 2s} = \frac{2(2/3)}{s[s + (2/3)]}$$

Ahora se necesita encontrar las funciones que darían las transformadas de Laplace de esta forma para obtener la transformada inversa y obtener x. Puesto que la transformada inversa de $a/[s(s + a)]$ es $(1 - e^{-at})$, entonces

$$x = 2(1 - e^{-2t/3})$$

Ejemplo 6

La ecuación diferencial en función del voltaje a través del capacitor v_C, para un circuito RC en serie al que se le aplica una entrada escalón de voltaje de magnitud V en $t = 0$ está dada por

$$V = RC\frac{dv_C}{dt} + v_C$$

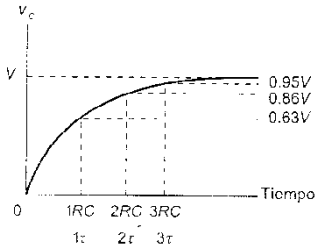


Figura 4.6 Ejemplo 6

v_C es cero en $t = 0$. Utilice la transformada de Laplace para resolver esta ecuación.

Respuesta

La transformada de Laplace para una entrada escalón unitario es $1/s$ y así, para un escalón de magnitud V es V/s. La transformada de Laplace para dv_C/dt es $[sV_C(s) \quad 0]$, debido a que la función v_C es cero en $t = 0$. La transformada de Laplace para $RCdv_C/dt$ es $RCsV_C(s)$. La transformada de Laplace para v_C es $V_C(s)$. De esta manera, la transformada de la ecuación diferencial es

$$\frac{V}{s} = RCsV_C(s) + V_C(s)$$

Así

$$V_C(s) = \frac{V}{(RCs + 1)s}$$

Al reordenar se tiene

$$V_C(s) = \frac{V(1/RC)}{[s + (1/RC)]s}$$

La función $(1 \quad e^{-at})$ proporciona la transformada de Laplace

$$\frac{a}{(s + a)s}$$

De este modo, con $a = (1/RC)$,

$$v_C = V(1 - e^{-t/RC})$$

La figura 4.6 muestra la gráfica de esta ecuación. Las formas de la ecuación y la gráfica son típicas de sistemas de primer orden sujetos a una entrada escalón. RC es la constante de tiempo τ (vea el capítulo 3).

Ejemplo 7

Para un circuito LR en serie alimentado por una entrada escalón de magnitud V en $t = 0$, la variación de corriente con el tiempo se describe mediante la ecuación

$$\frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = \frac{V}{R}$$

La corriente i es cero en $t = 0$. Resuelva esta ecuación usando la transformada de Laplace.

Respuesta

La transformada de Laplace para di/dt es $sI(s)$, puesto que $i(0)$ es cero, y así para $(L/R)di/dt$ es $(L/R)sI(s)$. La transformada de Laplace de i es $I(s)$. La transformada de Laplace para una entrada escalón unitario es $1/s$ y así, para un escalón de magnitud (V/R) es $(V/R)/s$. Por lo tanto, la transformada de la ecuación diferencial se puede escribir como

$$(L/R)sI(s) + I(s) = \frac{(V/R)}{s}$$

Por lo tanto

$$I(s) = \frac{(V/R)}{[(L/R)s + 1]s}$$

Al reordenar se tiene

$$I(s) = \frac{(V/R)(R/L)}{[s + (R/L)]s}$$

La función $(1 - e^{-at})$ da la transformada de Laplace

$$\frac{a}{(s + a)s}$$

De este modo, con $a = (R/L)$,

$$i = (V/R)(1 - e^{-Rt/L})$$

La gráfica de esta ecuación es de forma similar a la de la gráfica de la figura 4.6, la constante de tiempo τ es L/R y el valor de la corriente eventualmente alcanza V/R.

Ejemplo 8

Cuando un termómetro de mercurio se sumerge en un líquido caliente, en esencia existe una entrada escalón de temperatura θ_i al termómetro, donde θ_i es la temperatura del líquido caliente. La relación entre la salida del termómetro θ_o, es decir, su lectura, y el tiempo está dada por la ecuación diferencial de primer orden

$$K\frac{d\theta_o}{dt} = \theta_i - \theta_o$$

donde θ_o es una función del tiempo. Emplear la transformada de Laplace para obtener la solución de esta ecuación. Tome el valor de θ_o como cero en $t = 0$, es decir, en este problema sólo tiene interés el cambio en la temperatura del termómetro cuando se introduce en el líquido. De este modo θ_i es la temperatura del líquido caliente relativa a la que tiene el termómetro antes de sumergirlo en el líquido.

Respuesta

La transformada de Laplace de $d\theta_o/dt$ es $s[\theta_o(s) - 0]$, puesto que el valor θ_o es cero en $t = 0$. La transformada de Laplace de $Kd\theta_o/dt$ es $Ks\theta_o(s)$. La transformada de Laplace de θ_i es $(1/s)\theta_i$, puesto que ésta es una entrada escalón, y para θ_o es $\theta_o(s)$. Por lo tanto, la transformada de la ecuación diferencial es

$$Ks\theta_o(s) = (1/s)\theta_i - \theta_o(s)$$

Por lo tanto

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i} = \frac{1}{s(Ks + 1)}$$

Esto se puede reordenar para dar por resultado

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i} = \frac{(1/K)}{s[s + (1/K)]}$$

La función $(1 - e^{-at})$ da la transformada de Laplace

$$\frac{a}{(s+a)s}$$

De este modo

$$\theta_o = \theta_i(1 - e^{-t/K})$$

La gráfica de esta ecuación es de forma similar a la de la gráfica de la figura 4.6, la constante de tiempo τ es K y el valor de la temperatura eventualmente alcanza θ_i.

Fracciones parciales

El proceso de convertir una expresión algebraica en términos que sean fracciones simples se denomina descomposición en *fracciones parciales*. Por ejemplo, la conversión de

$$\frac{3x+4}{x^2+3x+2} \quad \text{en} \quad \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$$

Con el propósito de descomponer una expresión algebraica en fracciones parciales se debe factorizar el denominador, por ejemplo, la expresión anterior (x^2+3x+2), da los factores $(x+1)$ y $(x+2)$, y el numerador debe ser al menos un grado menor que el denominador; así, en este ejemplo el numerador sólo contiene x a la potencia 1 mientras que el denominador tiene x a la potencia 2. Cuando el grado del numerador es igual o mayor que el del denominador, el numerador se debe dividir entre el denominador para obtener términos en los que se tengan numeradores que por lo menos sean de un grado menor al del denominador.

Existen tres tipos de *fracciones parciales*. La forma de las fracciones parciales para cada uno de los tipos es la siguiente:

1 Factores lineales en el denominador

Expresión $\dfrac{f(s)}{(s+a)(s+b)(s+c)}$

Fracciones parciales $\dfrac{A}{s+a} + \dfrac{B}{s+b} + \dfrac{C}{s+c}$

2 Factores lineales repetidos en el denominador

Expresión $\dfrac{f(s)}{(s+a)^n}$

Fracciones parciales $\dfrac{A}{s+a} + \dfrac{B}{(s+a)^2} + \dfrac{C}{(s+a)^3}$

$$+\ldots+\frac{N}{(s+a)^n}$$

3 Factores cuadráticos en el denominador, cuando éstos se factorizan sólo con términos imaginarios

Expresión $\dfrac{f(s)}{as^2+bs+c}$

Fracciones parciales $\dfrac{As+B}{as^2+bs+c}$

o si también hay un factor lineal en el denominador

$$\text{Expresión } \frac{f(t)}{(as^2+bs+c)(s+d)}$$

$$\text{Fracciones parciales } \frac{As+B}{as^2+bs+c} + \frac{C}{s+d}$$

Sin importar la forma de las fracciones parciales, los valores de las constantes A, B, C, etcétera, se pueden encontrar al combinar las fracciones parciales de una expresión con el mismo denominador que la ecuación original. Así, si las fracciones parciales de

$$\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} \quad \text{son} \quad \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

Entonces

$$\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

De esta manera, el numerador de la expresión que se obtuvo a partir de las fracciones parciales debe tener el mismo valor que el de la ecuación original.

$$3x+4 = A(x+2)+B(x+1)$$

Esto debe ser cierto para todos los valores de la variable. El procedimiento consiste entonces en elegir valores de la variable con los que algunos términos se hagan cero y permitan determinar otras constantes. Así, si $x=-2$, entonces

$$3(-2)+4 = A(-2+2)+B(-2+1)$$

y $B=2$. Si se hace $x=-1$, entonces

$$3(-1)+4 = A(-1+2)+B(-1+1)$$

y $A=1$. De este modo

$$\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}$$

Ejemplo 9

Determinar las fracciones parciales de

$$\frac{s+5}{s^2+3s+2}$$

Respuesta

La expresión se puede reordenar para obtener

$$\frac{s+5}{(s+1)(s+2)}$$

Ésta se puede descomponer en fracciones parciales

$$\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}$$

Ésta es igual a

$$\frac{A(s+2)+B(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

Puesto que esta expresión tiene el mismo denominador que la expresión inicial, entonces se debe tener, para que las expresiones sean iguales

$$A(s+2)+B(s+1)=s+5$$

Para determinar los valores de las constantes A y B, se eligen los valores de s de modo que los términos en A o B sean iguales a cero. Así, si se elige $s=-1$, entonces

$$A(-1+2)+B(-1+1)=-1+5$$

y A es igual a 4. Cuando $s=-2$, entonces

$$A(-2+2)+B(-2+1)=-2+5$$

y B es igual a –3. De esta manera, la expresión en fracciones parciales es

$$\frac{4}{s+1}+\frac{-3}{s+2}$$

Ejemplo 10

Considérese un circuito CR en serie que tiene como entrada una rampa de voltaje. La ecuación diferencial en función de la diferencia de potencial a través del capacitor v_C para este circuito es

$$RC\frac{dv_C}{dt}+v_C=Vt$$

Vt es la rampa de voltaje de entrada, donde V es el aumento de voltaje por segundo. Cuando $t=0$ el valor de v_C es 0.

Respuesta

Obsérvese que esta ecuación difiere de la ecuación diferencial para la entrada escalón V del ejemplo 7, por el término Vt, donde V es la razón de cambio de voltaje en lugar que el valor en estado estable del escalón.

La transformada de Laplace para dv_C/dt es $[sV_C(s)-0]$, debido a que la función v_C es cero en $t=0$. La transformada de Laplace para $RCdv_C/dt$ es $RCsV_C(s)$. La transformada de Laplace para v_C es $V_C(s)$. La transformada para t es $1/s^2$ y así para Vt es V/s^2. De este modo, la transformada para la ecuación diferencial es

$$RCsV_C(s)+V_C(s)=\frac{V}{s^2}$$

Por lo tanto

$$V_C(s)=\frac{V}{(RCs+1)s^2}$$

Ésta se puede reordenar para obtener

$$V_C(s) = \frac{V(1/RC)}{[s + (1/RC)]s^2}$$

Es necesario emplear las fracciones parciales para obtener las expresiones apropiadas que permitan llevar a cabo la transformada inversa. Puesto que el denominador involucra s^2 se debe utilizar la forma de fracciones parciales para términos cuadráticos. De esta manera

$$\frac{a}{(s+a)s^2} = \frac{A}{s+a} + \frac{(Bs+D)}{s^2} = \frac{As^2 + (Bs+D)(s+a)}{(s+a)s^2}$$

donde $a = 1/RC$, y A, B y D son constantes. Así, puesto que los numeradores deben ser iguales,

$$a = As^2 + Bs^2 + Bsa + Ds + Da$$

Si se hace $s = -a$, entonces

$$a = Aa^2 + Ba^2 - Ba^2 - Da + Da$$

y así $A = 1/a$. Si se hace $s = 0$, entonces

$$a = 0 + 0 + 0 + 0 + Da$$

y de este modo $D = 1$. Si se hace $s = +a$, entonces

$$a = Aa^2 + Ba^2 + Ba^2 + Da + Da$$

y puesto que $A = 1/a$ y $D = 1$, entonces

$$a = a + Ba^2 + Ba^2 + a + a$$

y así $B = -1/a$. De este modo, la expresión se puede escribir como

$$\frac{1/a}{(s+a)} + \frac{[(-1/a)s+1]}{s^2} = \frac{1/a}{(s+a)} - \frac{(1/a)}{s} + \frac{1}{s^2}$$

La función e^{-at} tiene la transformada de Laplace $1/(s+a)$, la función escalón unitario tiene la transformada $1/s$ y la función rampa t, la transformada $1/s^2$. Por lo tanto

$$v_C = V[(RC)e^{-t/RC} - (RC) + t]$$

y así

$$v_C = Vt - VRC(1 - e^{-t/RC})$$

La figura 4.7 muestra la gráfica de esta ecuación. La manera más sencilla de imaginar esta gráfica es la gráfica de la línea recta $v_C = Vt$ menos la gráfica $v_C = VRC(1 - e^{-t/RC})$. La constante de tiempo es RC.

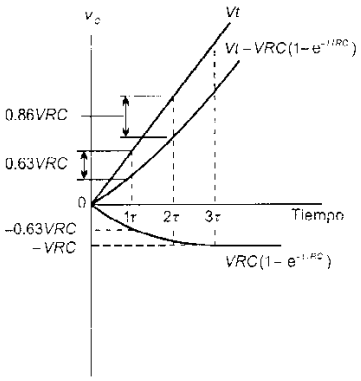


Figura 4.7 Ejemplo 10

Teoremas del valor inicial y del valor final

Si la transformada de Laplace se multiplica por s, el valor del producto cuando s tiende a infinito es el valor de la transformada inversa a medida que el tiempo t tiende a cero.

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{t\to 0} f(t) \qquad [4]$$

Esto se conoce como el *teorema del valor inicial*.

Si la transformada de Laplace se multiplica por s, el valor del producto cuando s tiende a cero es el valor de la transformada inversa a medida que el tiempo t tiende a infinito.

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t) \qquad [5]$$

Esto se conoce como el *teorema del valor final.*

Los teoremas del valor inicial y del valor final son útiles cuando es necesario determinar, a partir de la transformada de Laplace, el comportamiento de la función $f(t)$ en 0 y en ∞.

Ejemplo 11

Sin obtener la transformada inversa de Laplace, ¿cuáles son los valores inicial y final de las funciones de las siguientes transformadas?

a) $F(s) = \dfrac{s+a}{s^2}$

b) $V_C(s) = \dfrac{V(1/RC)}{[s+(1/RC)]s}$

Respuesta

a) Si la expresión se multiplica por s, se convierte en

$$sF(s) = \frac{s+a}{s} = 1 + \frac{a}{s}$$

Con el teorema del valor inicial, cuando $s \to \infty$, la expresión tiende al valor de 1. Así, el valor inicial de la función es 1. Al usar el teorema del valor final, cuando $s \to 0$, la expresión tiende a un valor ∞. De esta manera, el valor de la función es ∞.

b) Si la expresión se multiplica por s ésta se convierte en

$$sV_C(s) = \frac{V(1/RC)}{[s+(1/RC)]}$$

Al usar el teorema del valor inicial, cuando $s \to \infty$, la expresión tiende al valor de 0. Por lo que, el valor inicial de V_C es 0. Con el teorema del valor final, cuando $s \to 0$, la expresión tiende al valor $V(1/RC)/(1/RC)$ o simplemente V.

Problemas

1 Determinar, a partir de la tabla 4.1, la transformada de Laplace para:

a) Un escalón de voltaje de magnitud 6 V que empieza en $t = 0$ s.
b) Un escalón de voltaje de magnitud 6 V que empieza en $t = 3$ s.
c) Una rampa de voltaje de 6 V/s que empieza en $t = 0$ s.
d) Una rampa de voltaje de 6 V/s que empieza en $t = 3$ s.
e) Un impulso de voltaje de magnitud 6 V en $t = 0$ s.
f) Un impulso de voltaje de magnitud 6 V en $t = 3$ s.
g) Un voltaje senoidal de amplitud 6 V y una frecuencia de 50 Hz, que empieza en $t = 0$ s.

2 Determinar, con base en la tabla 4.1, la transformada de Laplace para:

a) e^{-2t}
b) $5e^{-2t}$
c) $V_0 e^{-t/\tau}$
d) $1-e^{-2t}$
e) $5(1-e^{-2t})$
f) $V_0(1-e^{-t/\tau})$

3 Determinar, a partir de la tabla 4.1, la inversa de las siguientes transformadas de Laplace:

a) $2/(s+3)$
b) $2/(3s+1)$
c) $2/s(s+3)$
d) $2/s(3s+1)$

4 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $2\dfrac{dx}{dt}+5x=6$ con $x=0$ cuando $t=0$

b) $8\dfrac{dx}{dt}+x=4$ con $x=0$ cuando $t=0$

5 Determinar las transformadas de Laplace de los siguientes voltajes, los cuales varían con el tiempo de acuerdo con las ecuaciones dadas:

a) $v=5(1-e^{-t/50})$
b) $v=10+5(1-e^{-t/50})$
c) $v=5e^{-t/50}$

6 Determinar la transformada de Laplace de los voltajes dados por las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\dfrac{dv}{dt}+2v=0$ con $v=0$ cuando $t=0$

b) $\dfrac{dv}{dt}+2v=9$ con $v=0$ cuando $t=0$

7 Usando los teoremas del valor inicial y final, ¿cuáles son los valores inicial y final de las señales dadas por las siguientes transformadas de Laplace?

a) $\dfrac{5}{s}$

b) $\dfrac{5}{s(s+2)}$

8 Determinar mediante las fracciones parciales, la variación con el tiempo de las señales dadas por las siguientes transformadas de Laplace?

a) $\dfrac{4s-5}{s^2-s-2}$

b) $\dfrac{6s+8}{s(s+1)(s+2)}$

c) $\dfrac{1}{s^2+3s+2}$

9 Resolver, con la transformada de Laplace, las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden:

a) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+64x=0$ con $\dfrac{dx}{dt}=0$ y $x=2$ cuando $t=0$

b) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+64x=0$ con $\dfrac{dx}{dt}=2$ y $x=0$ cuando $t=0$

5 Modelos de sistemas dinámicos

Introducción

En el capítulo 1 se consideraron los sistemas de control en situaciones en estado estable, es decir, que la función de transferencia no cambia con el tiempo. En tales sistemas no se tuvo en cuenta cómo variaría la salida con el tiempo cuando existía una entrada. No obstante, estudiar los modelos para los bloques funcionales pasivos básicos de los sistemas en el capítulo 2 condujo a relaciones entrada-salida que dependen del tiempo e involucran ecuaciones diferenciales. Los capítulos 3 y 4 se dedicaron al estudio de las matemáticas para la solución de dichas ecuaciones diferenciales. Este capítulo reúne el material de los capítulos anteriores para estudiar el comportamiento de los sistemas de control cuando se tiene en cuenta el tiempo, es decir, el comportamiento dinámico de los sistemas.

Funciones de transferencia de elementos dinámicos

Suponga un sistema en el que la entrada θ_i está relacionada con la salida θ_o mediante la ecuación diferencial

$$a_2 \frac{d^2\theta_o}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b_1\theta_i$$

donde a_2, a_1, a_0 y b_1 son constantes. Si todas las condiciones iniciales son cero, entonces la transformada de Laplace de esta ecuación es

$$a_2s^2\theta_o(s) + a_1s\theta_o(s) + a_0\theta_o(s) - b_1\theta_i(s)$$

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{b_1}{a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

La *función de transferencia* $G(s)$ de un sistema lineal que describe su comportamiento dinámico se define como el cociente de la transformada de Laplace de la variable de salida $\theta_o(s)$ entre la transformada de Laplace de la variable de entrada $\theta_i(s)$, suponiendo que todas las condiciones iniciales son cero. Vea el capítulo 2 para una explicación del término lineal.

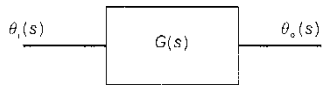


Figura 5.1 Representación mediante diagrama de bloques

$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} \qquad [1]$$

Por lo tanto, para el sistema dado por la ecuación anterior

$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{b_1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

De este modo, si un sistema se representa mediante un diagrama de bloques, entonces $G(s)$ es la "función" dentro de la caja, la cual toma una entrada $\theta_i(s)$ y da una salida $\theta_o(s)$ (figura 5.1).

Ejemplo 1

Escriba la función de transferencia $G(s)$ para los sistemas dados por las siguientes relaciones entrada-salida:

a) Un sistema masa-resorte-amortiguador (ecuación (13) del capítulo 2), con F como entrada y x como salida

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F$$

b) Un circuito resistor-capacitor (ecuación (26) del capítulo 2), con v como entrada y v_C como salida

$$v = RC\frac{dv_C}{dt} + v_C$$

c) Un circuito resistor-capacitor-inductor (ecuación (27) del capítulo 2), con v como entrada y v_C como salida

$$v = RC\frac{dv_C}{dt} + LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + v_C$$

d) Un sistema eléctrico (ecuación (30) del capítulo 2), con v como entrada y v_C como salida

$$v = \frac{R}{L}\int v_C\, dt + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C$$

e) Un sistema hidráulico (ecuación (51) del capítulo 2), con q_1 como entrada y h como salida

$$q_1 = A\frac{dh}{dt} + \frac{\rho g h}{R}$$

f) Los elementos en el sistema de un motor de cd controlado por armadura (figura 2.39*a* del capítulo 2):

Circuito de la armadura: entrada $(v_a - v_b)$, salida i_a

$$v_a - v_b = L_a\frac{di_a}{dt} + R_a i_a$$

Embobinado de armadura: entrada i_a, salida T

$$T = k_4 i_a$$

Carga: entrada T, salida ω

$$I\frac{d\omega}{dt} = T - \omega$$

Lazo de realimentación: entrada ω, salida v_b

$$v_b = k_3\omega$$

g) Sistema hidráulico con carga (ecuación (90) del capítulo 2)

$$\tau\frac{d^2x_o}{dt^2} + \frac{dx_o}{dt} = kx_i$$

Respuesta

a) Al realizar la transformada de Laplace de la ecuación diferencial con todas las condiciones iniciales igual a cero se obtiene

$$ms^2X(s) + csX(s) + kX(s) = F(s)$$

Por lo tanto

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

b) Al realizar la transformada de Laplace de la ecuación diferencial con todas las condiciones iniciales igual a cero se obtiene

$$RCsV_C(s) + V_C(s) = V(s)$$

Por lo tanto

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

c) Al realizar la transformada de Laplace de la ecuación diferencial con todas las condiciones iniciales igual a cero se obtiene

$$RCsV_C(s) + LCs^2V_C(s) + V_C(s) = V(s)$$

Por lo tanto

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

d) Al realizar la transformada de Laplace de la ecuación diferencial con todas las condiciones iniciales igual a cero se obtiene

$$\frac{R}{L}\frac{1}{s}V_C(s) + RCsV_C(s) + V_C(s) = V(s)$$

Por lo tanto

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{(R/L)(1/s) + RCs + 1}$$

$$= \frac{s}{(R/L) + RCs^2 + s}$$

e) Al realizar la transformada de Laplace de la ecuación diferencial con todas las condiciones iniciales igual a cero se obtiene

$$AsH(s) + (\rho g/R)H(s) = Q_i(s)$$

Por lo tanto

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{As + (\rho g/R)}$$

f) Al realizar la transformada de Laplace de la ecuación diferencial con todas las condiciones iniciales igual a cero se obtiene

Circuito de armadura

$$(V_a - V_b)(s) = L_a s I_a(s) + R_a I_a(s)$$

$$G(s) = \frac{I_a(s)}{(V_a - V_b)(s)} = \frac{1}{L_a s + R_a}$$

Embobinado de armadura

$$G(s) = \frac{T(s)}{i_a(s)} = k_3$$

Carga

$$Is\omega(s) = T(s) - c\omega(s)$$

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{Is + c}$$

Realimentación

$$G(s) = \frac{V_b(s)}{\omega(s)} = k_2$$

g) Al realizar la transformada de Laplace de la ecuación diferencial con todas las condiciones iniciales igual a cero se obtiene

$$\tau s^2 X_o(s) + s X_o(s) = k X_i(s)$$

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{k}{s(\tau s + 1)}$$

Elementos de primero y segundo orden

El *orden* de un elemento o sistema se puede definir como la máxima potencia de la derivada en la ecuación diferencial. De modo alternativo, el *orden* de un elemento o sistema se puede definir como la máxima potencia de s en el denominador de la función de transferencia. Así un elemento de primer orden sólo tendrá s a la potencia 1 en el denominador de la función de transferencia, mientras que un elemento de segundo orden tendrá que la máxima potencia de s es dos.

Para un *elemento de primer orden* la ecuación diferencial es de la forma

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_o \theta_o = b_o \theta_i \qquad [2]$$

La transformada de Laplace correspondiente a esta ecuación es, si $\theta_o - 0$ en $t = 0$.

$$a_1 s \times \theta_o(s) + a_o \times \theta_o(s) = b_o \times \theta_i(s)$$

Por lo tanto

$$G(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}$$

Ésta se puede reordenar para obtener

$$G(s) = \frac{b_0 / a_0}{(a_1 / a_0)s + 1} \qquad [3]$$

b_0 / a_0 es la función de transferencia en estado estable G del sistema, a_1 / a_0 es la constante de tiempo τ del sistema. Por lo tanto

$$G(s) = \frac{G}{\tau s + 1} \qquad [4]$$

Ésta es la forma general que adopta la relación entrada-salida en el dominio de s para un sistema de primer orden.

La relación entre la entrada θ_i y la salida θ_o para un elemento de *segundo orden* se describe mediante la ecuación diferencial (vea el capítulo 3)

$$a_2 \frac{d^2\theta_o}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b_0\theta_i \qquad [5]$$

donde b_0, a_0, a_1 y a_2 son constantes. Si $t = 0$ se tiene que $\theta_o = 0$ y $d\theta_o / dt = 0$ entonces la transformada de Laplace es

$$a_2 s^2 \times \theta_o(s) + a_1 s \times \theta_o(s) + a_0 \times \theta_o(s) = b_0 \times \theta_i(s)$$

Por lo tanto

$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Ésta se puede reordenar para obtener

$$G(s) = \frac{(b_0 / a_0)}{(a_2 / a_0)s^2 + (a_1 / a_0)s + 1} \qquad [6]$$

Como se indicó en el capítulo 3, la ecuación diferencial de segundo orden se puede escribir en términos de la frecuencia natural ω_n y del factor de amortiguamiento relativo ζ.

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{d\theta_o}{dt} + \omega_n^2\theta_o = b_0\omega_n^2\theta_i \qquad [7]$$

donde ω_n es la frecuencia angular con la cual el sistema oscilará libremente en ausencia de cualquier amortiguamiento y ζ es el *factor de amortiguamiento relativo*. La transformada de Laplace es

$$s^2\theta_o(s) + 2\zeta\omega_n s\theta_o(s) + \omega_n^2\theta_o(s) = b_0\omega_n^2\theta_i(s)$$

Por lo tanto

$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{b_0\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad [8]$$

Ésta es la forma general que adopta un sistema de segundo orden en el dominio de s.

Ejemplo 2

¿Cuáles son los órdenes de los elementos descritos por las funciones de transferencia dadas en la solución del ejemplo 1?

a) $G(s) = \dfrac{1}{ms^2 + cs + k}$

b) $G(s) = \dfrac{1}{RCs + 1}$

c) $G(s) = \dfrac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$

d) $G(s) = \dfrac{s}{(R/L) + RCs^2 + s}$

e) $G(s) = \dfrac{1}{As + (\rho g / R)}$

Respuesta

a) Segundo orden puesto que el término s de máxima potencia en el denominador es s^2.
b) Primer orden puesto que el término s de máxima potencia en el denominador es s.
c) Segundo orden puesto que el término s de máxima potencia en el denominador es s^2.
d) Segundo orden puesto que el término s de máxima potencia en el denominador es s^2.
e) Primer orden puesto que el término s de máxima potencia en el denominador es s.

Respuesta escalón de un sistema de primer orden

Considere el comportamiento de un sistema de primer orden cuando está sujeto a una entrada escalón. Para un sistema de primer orden la relación puede adoptar la forma dada por la ecuación (4), a saber

$$G(s) = \frac{G}{\tau s + 1}$$

La transformada de Laplace de la salida es, de este modo

$G(s) \times$ transformada de Laplace de la entrada

$$\frac{G}{\tau s + 1} \times \text{transformada de Laplace de la entrada}$$

La transformada de Laplace para una entrada escalón unitario en $t = 0$ es $1/s$. Por lo tanto, para tal entrada

$$\text{Transformada de Laplace de la salida} = \frac{G}{\tau s + 1} \times \frac{1}{s}$$

$$= G \times \frac{(1/\tau)}{s[s + (1/\tau)]}$$

La transformada es de la forma

$$\frac{a}{s(s + a)}$$

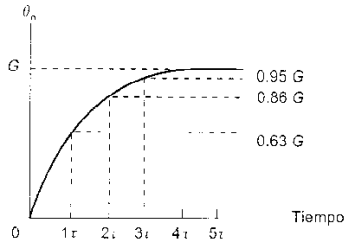


Figura 5.2 $\theta_o = G[1 - e^{-t/\tau}]$ para una entrada escalón unitario

donde $a = (1/\tau)$. Por lo tanto, para una entrada escalón unitario.

$$\theta_o = G[1 - e^{-t/\tau}] \qquad [9]$$

La figura 5.2 es la gráfica de esta ecuación. Si el escalón es de magnitud A, entonces

$$\theta_o = AG[1 - e^{-t/\tau}] \qquad [10]$$

Ejemplo 3

Un termopar tiene la función de transferencia que relaciona su salida en volts con su entrada θ_i en °C de la forma

$$G(s) - \frac{30 \times 10^{-6}}{10s + 1}$$

¿Cuál será *a*) el tiempo que transcurre para que la salida del termopar alcance el 95% de su valor final y *b*) el valor final en estado estable cuando hay una entrada escalón de 100 °C?

Respuesta

a) Como indica la función de transferencia, el termopar es un sistema de primer orden. Así, al comparar la función de transferencia con la ecuación (4), es decir,

$$G(s) = \frac{G}{\tau s + 1}$$

$G = 30 \times 10^{-6}$ V/°C y $\tau = 10$ s. El tiempo que toma para alcanzar el 95% de la salida es 3τ (como en la figura 4.8) y, de este modo son 30 s.

b) Se puede emplear el teorema del valor final (ecuación (5) del capítulo 4)

$$\lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{t \to \infty} f(t)$$

Para una entrada escalón de magnitud θ_i, la transformada de Laplace de la salida es θ_i / s, por lo tanto

$$\text{Transformada de Laplace de la salida} = \frac{G}{\tau s + 1} \times \frac{\theta_i}{s}$$

De esta manera

$$sF(s) = \frac{G\theta_i}{\tau s + 1}$$

Como $s \to 0$, entonces $sF(s)$ tiende a $G\theta_i$ y así éste es el valor final en estado estable. Éste es $30 \times 10^{-6} \times 100 = 300 \times 10^{-6}$ V.

Respuesta rampa de un sistema de primer orden

Considere el comportamiento de un sistema de primer orden cuando está sujeto a una entrada escalón. Para un sistema de primer orden la relación puede adoptar la forma dada por la ecuación (4), a saber

$$G(s) = \frac{G}{\tau s + 1}$$

La transformada de Laplace de la salida es, de este modo

$$G(s) \times \text{transformada de Laplace de la entrada}$$

$$\frac{G}{\tau s+1} \times \text{transformada de Laplace de la entrada}$$

La transformada de Laplace para una entrada rampa de pendiente unitaria en $t=0$ es $1/s^2$. Por lo tanto, para tal entrada

$$\text{Transformada de Laplace de la salida} = \frac{G}{(\tau s+1)s^2}$$

$$= G \times \frac{(1/\tau)}{[s+(1/\tau)]s^2}$$

La transformada es de la forma

$$\frac{a}{s^2(s+a)}$$

la cual tiene la solución

$$t - \frac{(1-e^{-at})}{a}$$

Así, la salida θ_o para una rampa de pendiente unitaria está dada por

$$\theta_o = G[t-\tau(1-e^{-t/\tau})] \qquad [11]$$

La figura 5.3 es la gráfica de esta ecuación. Ésta se puede considerar como la gráfica de Gt menos la gráfica de $G\tau(1-e^{-t/\tau})$. Para una rampa de pendiente A, es decir, $\theta_i = At$, entonces

$$\theta_o = GA[t-\tau(1-e^{-t/\tau})] \qquad [12]$$

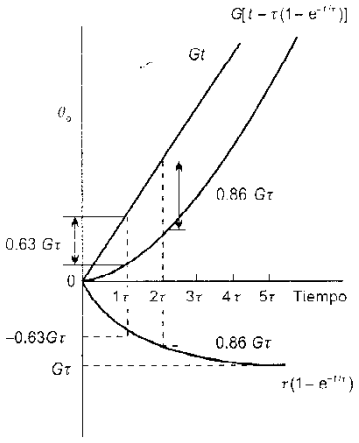


Figura 5.3 $\theta_o = G[t-\tau(1-e^{-t/\tau})]$ para una entrada rampa unitaria

Ejemplo 4

Un termopar tiene la función de transferencia que relaciona su salida en volts con su entrada θ_i en °C de la forma

$$G(s) = \frac{30\times10^{-6}}{10s+1}$$

Cuando el termopar está sujeto a una entrada de temperatura que aumenta de manera uniforme a 5 °C/s, ¿cuál será la salida del termopar después de 12 s y cuánto más se retrasará la salida indicada si éste respondiera en forma instantánea a la entrada?

Respuesta

Para una entrada rampa aplicada a un sistema de primer orden, la ecuación (12) da

$$\theta_o = GA[t-\tau(1-e^{-t/\tau})]$$

y, puesto que la constante de tiempo τ para el sistema es 10 s (vea el ejemplo 12) y G es 30×10^{-6} V/°C, entonces para una rampa de 5 °C/s

$$\theta_o = 30\times10^{-6}\times5[12-10(1-e^{-12/10})] = 7.5\times10^{-4}\ \text{V}$$

Como indica la figura 5.3, el retraso es la diferencia entre los valores de GAt y $GA[t-\tau(1-e^{-t/\tau})]$. Puesto que $GAt = 30\times10^{-6}\times5\times12 = 18.0\times10^{-4}$ V, el retraso es 10.5×10^{-4} V.

Respuesta impulso de un sistema de primer orden

Considere el comportamiento de un sistema de primer orden cuando está sujeto a una entrada impulso. Para un sistema de primer orden la relación puede adoptar la forma dada por la ecuación (4), a saber

$$G(s) = \frac{G}{\tau s + 1}$$

La transformada de Laplace de la salida es, entonces

$G(s)\times$ transformada de Laplace de la entrada

$$\frac{G}{\tau s+1} \times \text{transformada de Laplace de la entrada}$$

La transformada de Laplace para un impulso unitario en $t = 0$ es 1. Por lo tanto, para tal entrada

$$\text{Transformada de Laplace de la salida} = \frac{G}{\tau s+1}\times 1$$

$$= G \times \frac{(1/\tau)}{[s+(1/\tau)]}$$

La transformada es de la forma

$$\frac{1}{s+a}$$

y ésta dada por la función e^{-at}. De este modo

$$\theta_o = G(1/\tau)e^{-t/\tau} \qquad [13]$$

La figura 5.4 es la gráfica de esta ecuación. Si el impulso tiene una magnitud A, entonces

$$\theta_o = GA(1/\tau)e^{-t/\tau} \qquad [14]$$

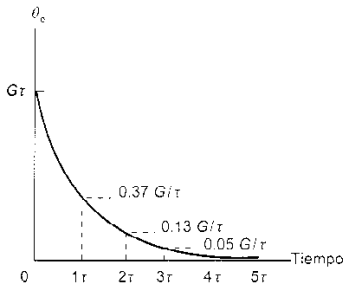


Figura 5.4 $\theta_o = G(1/\tau)e^{-t/\tau}$ para un impulso unitario en $t = 0$

Ejemplo 5

Un termopar tiene la función de transferencia que relaciona su salida en volts con su entrada θ_i en °C de la forma

$$G(s) = \frac{30\times10^{-6}}{10s+1}$$

¿Cuál será la salida del termopar 5 s después de que tuvo como entrada un impulso de temperatura de 100 °C mediante el contacto muy breve y súbito con un objeto caliente?

Respuesta

El termopar es un sistema de primer orden sujeto a una entrada impulso de magnitud 100°C. Así es posible utilizar la ecuación (14)

$$\theta_o = GA(1/\tau)e^{-t/\tau}$$

y puesto que $G = 30 \times 10^{-6}$ V y $\tau = 10$ s (vea el ejemplo 3) entonces

$$\theta_o = 30 \times 10^{-6} \times 100(1/10)e^{-5/10} = 18 \times 10^{-4} \text{ V}$$

Respuesta escalón de un sistema de segundo orden

Considere la salida de un sistema de segundo orden cuando está sujeto a una entrada escalón unitario.

Transformada de Laplace de la salida

= $G(s)$ × transformada de Laplace de la entrada

Así, al emplear la ecuación (8) para representar la forma general de un sistema de segundo orden en el dominio de s

$$\theta_o(s) = \frac{b_0\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \times \theta_i(s) \qquad [15]$$

debido a que, para un escalón unitario $\theta_i(s) = 1/s$ entonces

$$\theta_o(s) = \frac{b_0\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} \qquad [16]$$

Ésta se puede reordenar como

$$\theta_o(s) = \frac{b_0\omega_n^2}{(s - m_1)(s - m_2)s} \qquad [17]$$

donde m_1 y m_2 son las raíces de la ecuación

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Así, puesto que las raíces están dadas para una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

entonces

$$m = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2)}}{2}$$

$$m_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)} \qquad [18]$$

$$m_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)} \qquad [19]$$

El tipo de respuesta que se presenta, es decir, la transformada inversa, depende del valor del factor de amortiguamiento relativo ζ. Cuando $\zeta > 1$ entonces $\sqrt{(\zeta^2 - 1)}$ es un número real y se dice que el sistema es *sobreamortiguado*. Esto significa que ambas raíces son reales.

Utilizando las fracciones parciales, la ecuación (17) se puede reordenar como

$$\theta_o(s) = \frac{1}{s} + \frac{A}{s - m_1} + \frac{B}{s - m_2} \qquad [20]$$

con

$$(s-m_1)(s-m_2)+As(s-m_2)+Bs(s-m_1)=b_0\omega^2 \qquad [21]$$

Por lo tanto, cuando $s=m_1$, entonces

$$Am_1(m_1-m_2)=b_0\omega_n^2$$

$$A=\frac{b_0\omega_n^2}{m_1(m_1-m_2)}$$

Al sustituir los valores de m_1 y m_2 a partir de las ecuaciones (18) y (19)

$$A=\frac{b_0\omega_n^2}{[-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{(\zeta^2-1)}][2\omega_n\sqrt{(\zeta^2-1)}]}$$

$$A=\frac{b_0}{[-\zeta+\sqrt{(\zeta^2-1)}][2\sqrt{(\zeta^2-1)}]}$$

Al multiplicar numerador y denominador de esta fracción por $[-\zeta-\sqrt{(\zeta^2-1)}]$ da por resultado

$$A=\frac{b_0[-\zeta-\sqrt{(\zeta^2-1)}]}{[1]2\sqrt{(\zeta^2-1)}}$$

Por lo tanto

$$A=-\frac{b_0\zeta}{2\sqrt{(\zeta^2-1)}}-\frac{b_0}{2} \qquad [22]$$

Con la ecuación (21) cuando $s=m_2$, entonces

$$Bm_2(m_2-m_1)=b_0\omega_n^2$$

$$B=\frac{b_0\omega_n^2}{m_2(m_2-m_1)}$$

y mediante un procedimiento similar al del cálculo de A.

$$B=-\frac{b_0\zeta}{2\sqrt{(\zeta^2-1)}}-\frac{b_0}{2} \qquad [23]$$

La respuesta del sistema es la transformada inversa de la ecuación (20). La transformada inversa para $1/s$ es 1, para $A/(s-m_1)$ es $A\exp(m_1t)$, y para $B/(s-m_2)$ es $B\exp(m_2t)$, entonces

$$\theta_o=1+A\exp(m_1t)+B\exp(m_2t) \qquad [24]$$

Al sustituir los valores de A, B, m_1 y m_2, antes obtenidos

$$\theta_o=1+\left[-\frac{b_0\zeta}{2\sqrt{(\zeta^2-1)}}-\frac{b_0}{2}\right]\exp\{[-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{(\zeta^2-1)}]t\}$$

$$+\left[\frac{b_0\zeta}{2\sqrt{(\zeta^2-1)}}-\frac{b_0}{2}\right]\exp\{[-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{(\zeta^2-1)}]t\} \qquad [25]$$

Cuando $\zeta = 1$ se dice que el sistema está *críticamente amortiguado*. Para esta condición $m_1 = m_2 = -\zeta\omega_n$. La ecuación (17) entonces se convierte en

$$\theta_o(s) = \frac{b_0\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2 s}$$

La transformada inversa de ésta es (vea la tabla 4.1)

$$\theta_o = b_0[1 - \exp(-\omega_n t) - \omega_n t \exp(-\omega_n t)] \qquad [26]$$

Cuando $\zeta < 1$ las raíces son complejas y se dice que el sistema está *subamortiguado*. Cuando esto se presenta las raíces, ecuaciones (18) y (19), se pueden escribir como

$$m_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)}$$

$$m_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{[(-1)(1-\zeta^2)]}$$

y así, al escribir j por $\sqrt{(-1)}$

$$m_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{(1-\zeta^2)} \qquad [27]$$

De modo similar, puesto que

$$m_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)}$$

entonces

$$m_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{(1-\zeta^2)} \qquad [28]$$

La transformada inversa para la ecuación (16) con esta condición es (ver la tabla 4.1)

$$\theta_o(s) = \frac{b_0\omega^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)}$$

$$\theta_o = b_0\left[1 - \frac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}\right.$$

$$\left.\exp(-\zeta\omega_n t)\operatorname{sen}[\omega_n\sqrt{(1-\zeta^2)}t + \phi]\right] \qquad [29]$$

donde $\cos\phi = \zeta$. Esta ecuación se puede reordenar para dar la forma de la ecuación citada en el capítulo 3. Cuando $\zeta = 0$, es decir, no existe amortiguamiento, entonces la ecuación (29) da por resultado

$$\theta_o = b_0\{1 - 1e^0 \operatorname{sen}[\omega_n\sqrt{(1)}t + 0]\}$$

$$\theta_o = b_0\{1 - \operatorname{sen}\omega_n t\}$$

De esta manera, la salida oscila con la frecuencia no amortiguada ω_n.

La figura 3.12 muestra las gráficas de la respuesta de salida para diferentes valores del factor de amortiguamiento relativo, e ilustran los efectos de sobreamortiguamiento, amortiguamiento crítico y subamortiguamiento.

Ejemplo 6

Un sistema tiene la siguiente relación, en el dominio de s, entre su salida θ_o y su entrada θ_i. ¿Cuál es el estado de amortiguamiento del sistema cuando está sujeto a una entrada escalón?

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{1}{s^2 + 8s + 16}$$

Respuesta

Para una entrada escalón unitario $\theta_i = 1/s$, por lo tanto

$$\theta_o = \frac{1}{s(s^2 + 8s + 16)}$$

Ésta se puede simplificar a

$$\theta_o = \frac{1}{s(s+4)(s+4)}$$

Las raíces de la ecuación $s^2 + 8s + 16$ son de este modo $m_1 = m_2 = -4$. Ambas son raíces reales y repetidas. El sistema está entonces, críticamente amortiguado.

Ejemplo 7

Un sistema de segundo orden está subamortiguado con un factor de amortiguamiento relativo de 0.4 y una frecuencia angular libre de 10 Hz. ¿Cuál es *a*) la relación entre la salida y la entrada en el dominio de s, *b*) la relación entre la salida y la entrada en el dominio del tiempo cuando está sujeto a una entrada escalón unitario y *c*) el porcentaje de sobrepaso con dicha entrada?

Respuesta

a) En el dominio de s la ecuación de segundo orden será de la forma dada por la ecuación (8)

$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{b_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde b_0 es una constante, ω_n la frecuencia angular natural y ζ el factor de amortiguamiento relativo. De este modo

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{100 b_0}{s^2 + 8s + 100}$$

b) Cuando el sistema está sujeto a una entrada escalón unitario

$$\theta_o(s) = \frac{100 b_0}{s(s^2 + 8s + 100)}$$

Ésta tiene la solución general, como está dada en la tabla 4.1 y antes se analizó

$$\theta_o = b_0 \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)}} \exp(-\zeta\omega_n t) \operatorname{sen}[\omega_n \sqrt{(1-\zeta^2)}\, t + \phi] \right\}$$

donde $\cos\phi = \zeta$. Así, con $\omega_n = 10$ y $\zeta = 0.4$

$$\theta_o = b_0\left\{1 - \frac{1}{0.84}e^{-4t}\,\text{sen}\,(9.2t + 66.4°)\right\}$$

c) Como se obtuvo en el capítulo 3, ecuación (33)

$$\text{Sobrepaso en porcentaje} = \exp\left[\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}\right] \times 100\%$$

y así, con $\zeta = 0.4$

$$\text{Sobrepaso en porcentaje} = \exp\left[\frac{-0.4\pi}{\sqrt{(1-0.4^2)}}\right] \times 100\%$$

$$= 25.4\%$$

Respuesta rampa de un sistema de segundo orden

Considere la salida de un sistema de segundo orden cuando está sujeto a una entrada rampa unitaria.

Transformada de Laplace de la salida

= $G(s)$ × transformada de Laplace de la entrada

De esta manera, utilizando la ecuación (8) para representar la forma general de un sistema de segundo orden en el dominio de s

$$\theta_o(s) = \frac{b_0\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \times \theta_i(s)$$

Puesto que, para una rampa unitaria, $\theta_i(s) = 1/s^2$, entonces

$$\theta_o(s) = \frac{b_0\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s^2} \qquad [30]$$

$$\theta_o(s) = \frac{b_0\omega_n^2}{(s - m_1)(s - m_2)s^2} \qquad [31]$$

donde m_1 y m_2 son las raíces de la expresión cuadrática. Puesto que para una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c$ las raíces están dadas por

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

entonces

$$m_1 = \frac{-2\zeta\omega_n + \sqrt{(4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2)}}{2} = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)}$$

y

$$m_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)}$$

La ecuación (31) se puede reordenar usando las fracciones parciales en la forma

$$\theta_o(s) = b_0\left(\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s - m_1} + \frac{D}{s - m_2}\right) \qquad [32]$$

La evaluación de estas constantes, A, B, C y D, y sustituyendo los valores de m_1 y m_2 que antes se obtuvieron, da por resultado

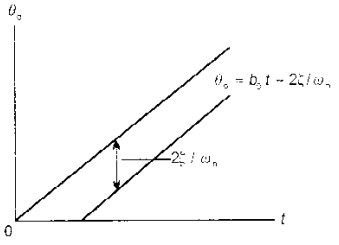


Figura 5.5 Respuesta en estado estable de un sistema de segundo orden a una entrada rampa unitaria

$$A = 1$$

$$B = -\frac{2\zeta}{\omega_n}$$

$$C = \frac{\zeta}{\omega_n} + \frac{2\zeta^2 - 1}{2\omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)}}$$

$$D = \frac{\zeta}{\omega_n} - \frac{2\zeta^2 - 1}{2\omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)}}$$

La transformada inversa de la ecuación (32) da por resultado

$$\theta_o = b_0[At + B + C\exp(m_1 t) + D\exp(m_2 t)]$$

$$\theta_o = b_0\left[t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + C\exp(m_1 t) + D\exp(m_2 t)\right] \qquad [33]$$

Los términos C y D en la ecuación dan la respuesta transitoria. La forma de esta respuesta depende, ya sea que ζ sea mayor, igual o menor que 1 y así, en consecuencia las raíces serán reales y diferentes, reales e iguales o complejas y diferentes. La forma que adopta la respuesta transitoria es, así, del mismo tipo que se presenta con una entrada escalón, la cual se estudió al principio de este capítulo. Los términos A y B dan la respuesta en estado estable. Cuando no hay amortiguamiento, es decir, $\zeta = 0$, entonces la respuesta en estado estable es sólo $b_0 t$ e indica que la salida se mantiene creciendo con el cambio suave de la señal de entrada que es una rampa unitaria, t. No obstante, cuando hay amortiguamiento la respuesta en estado estable se retrasa respecto a la señal de entrada por $2\zeta/\omega_n$ (figura 5.5). Esto se refiere a qué es el *error en estado estable*. La figura 5.6 ilustra los tipos de estados estables más las respuestas transitorias que se pueden presentar con diferentes grados de amortiguamiento.

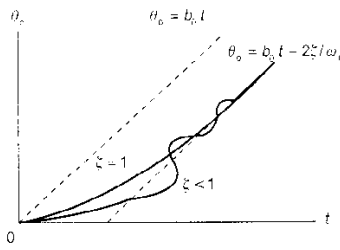


Figura 5.6 Respuesta de un sistema de segundo orden a una entrada rampa unitaria

Ejemplo 8

La relación entre la señal de entrada al plato de un radiotelescopio y la dirección en la que éste apunta está dada por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

teniendo ζ el valor de 0.4 y ω_n el valor de 10 Hz. ¿Cuál es *a*) el error en estado estable cuando la señal de entrada al telescopio es una señal rampa, y *b*) el tiempo de asentamiento para 2%?

Respuesta

a) El error en estado estable es la cantidad mediante la cual la posición en estado estable del telescopio se retrasa respecto a la señal de entrada rampa. El error tiene el valor de

$$\text{Error en estado estable} = \frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{2 \times 0.4}{10} = 0.08\,\text{s}$$

b) El tiempo de asentamiento es el que transcurre para que la respuesta adquiera valores dentro de un porcentaje fijo alrededor del valor en estado estable, en este caso, 2% (vea el capítulo 3 y la ecuación (35) del mismo). Este tiempo está dado por

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.4 \times 10} = 1\text{s}$$

Ejemplo 9

Un brazo robot tiene la función de transferencia

$$G(s) = \frac{K}{(s+3)^2}$$

Obtener la relación entre la salida, es decir, la posición del brazo como función del tiempo, cuando el brazo está sujeto a una entrada rampa unitaria.

Respuesta

Cuando el brazo está sujeto a una entrada rampa unitaria ($1/s^2$) la salida estará dada por

$$\theta_o(s) = \frac{K}{s^2(s+3)^2}$$

Ésta se puede reordenar en fracciones parciales como

$$\frac{A}{s^2} + \frac{B}{(s+3)} + \frac{C}{(s+3)^2}$$

Por lo tanto

$$A(s+3)^2 + Bs^2(s+3) + Cs^2 = K$$

Cuando $s = -3$, entonces $9C = K$ y, así, $C = K/9$. Cuando $s = 0$, entonces $9A = K$ y, así, $A = K/9$. Cuando $s = 1$, entonces $16A + 4B + C = K$ y, así, $B = -2K/9$. Por lo tanto

$$\theta_o(s) = \frac{K}{9s^2} - \frac{2K}{9(s+3)} + \frac{K}{9(s+3)^2}$$

Con base en la tabla 4.1,

$$\theta_o = (K/9)t - (2K/9)e^{-3t} + (K/9)te^{-3t}$$

Respuesta impulso de un sistema de segundo orden

Considere la salida de un sistema de segundo orden cuando está sujeto a una entrada impulso unitario en $t = 0$.

Transformada de Laplace de la salida

= $G(s)$ × transformada de Laplace de la entrada

De esta manera, según la ecuación (8), para representar la forma general de un sistema de segundo orden en el dominio de s

$$\theta_o(s) = \frac{b_0\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \times \theta_i(s)$$

Puesto que para un impulso unitario en $t = 0$, $\theta_i(s) = 1$, entonces

$$\theta_o(s) = \frac{b_0\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \qquad [34]$$

Ésta se puede reordenar como

$$\theta_o(s) = \frac{b_0\omega_n^2}{(s - m_1)(s - m_2)} \qquad [35]$$

donde m_1 y m_2 son las raíces de la expresión

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

De este modo, dado que las raíces están dadas por una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

entonces

$$m = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{(4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2)}}{2}$$

$$m_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{(\xi^2 - 1)}$$

$$m_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{(\xi^2 - 1)}$$

A partir de las fracciones parciales la ecuación (35) se puede reordenar en la forma

$$\theta_o(s) = \frac{A}{s - m_1} + \frac{B}{s - m_2} \qquad [36]$$

Por lo tanto

$$A(s - m_2) + B(s - m_1) = b_0\omega_n^2$$

y cuando $s = m_2$ entonces $B(m_2 - m_1) = b_0\omega_n^2$ y cuando $s = m_1$, entonces $A(m_1 - m_2) = b_0\omega_n^2$. De este modo, al sustituir los valores de m_1 y m_2

$$A = -B = \frac{b_0\omega_n}{2\sqrt{(\xi^2 - 1)}}$$

La transformada inversa de la ecuación (36) da por resultado

$$\theta_o = A\exp m_1 t + B\exp m_2 t$$

y así, sustituyendo los valores de A y B,

$$\theta_o = \frac{b_0\omega_n}{2\sqrt{(\xi^2 - 1)}}[\exp(m_1 t) \quad \exp(m_2 t)] \qquad [37]$$

La forma de la respuesta que se presenta dependerá de si las raíces m_1 y m_2, son reales o complejas, es decir, si ζ es mayor o menor que 1. Cuando $\zeta > 1$ las raíces son reales diferentes y el resultado es sólo un incremento en la salida seguido de un lento decaimiento hacia el valor cero (figura 5.7). Cuando $\xi = 1$ las raíces son reales e iguales y el sistema está críticamente amortiguado. Esto significa que continua

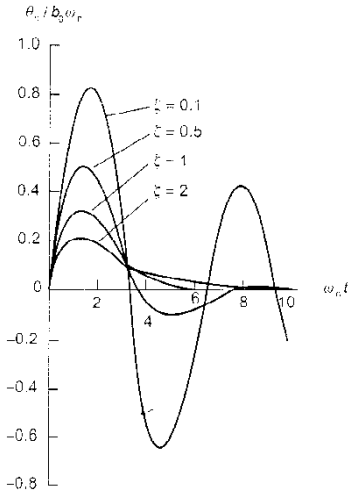


Figura 5.7 Respuesta de un sistema de segundo orden a una entrada impulso en $t = 0$

el incremento inicial en la salida y la respuesta regresa a cero en un tiempo mínimo sin oscilaciones. Cuando $\zeta < 1$ las raíces son cantidades complejas y se tiene un incremento inicial en las oscilaciones de salida, con un decaimiento uniforme en la amplitud hasta que eventualmente regresa al valor 0.

Cuando ζ es menor que 1 las raíces son complejas. Cuando este es el caso, la ecuación (37) a menudo se escribe en forma diferente. Esta forma se pudo obtener mediante la transformada inversa, dada en la tabla 4.1, de

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

como

$$\frac{\omega_n}{\sqrt{(1-\zeta^2)}} \exp(-\zeta\omega_n t) \operatorname{sen}[\omega_n \sqrt{(1-\zeta^2)}t]$$

entonces, para la ecuación (34)

$$0_o - \frac{b_0\omega_n}{\sqrt{(1-\zeta^2)}} \exp(-\zeta\omega_n t) \operatorname{sen}[\omega_n \sqrt{(1-\zeta^2)}t] \qquad [38]$$

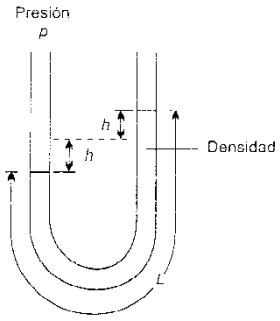


Figura 5.8 Ejemplo 10

Ejemplo 10

La Figura 5.8 muestra un sistema de segundo orden sencillo de un líquido en un tubo en U. Éste es característico de los sistemas que almacenan líquidos en dos tanques conectados y el movimiento del líquido que puede ocurrir entre ellos. Para un tubo en U la función de transferencia que relaciona la presión de entrada p con el líquido en uno de los extremos al cambio en la altura h está dada por

$$\frac{H(s)}{P(s)} = \frac{1}{\rho L s^2 + Rs + 2\rho g}$$

donde ρ es la densidad del líquido, L la longitud total de la columna de líquido, R la resistencia hidráulica y g la aceleración debida a la gravedad. ¿Cuál es *a*) la frecuencia no amortiguada, *b*) el factor de amortiguamiento relativo, y *c*) la ecuación que relaciona h con el tiempo cuando hay un impulso de entrada?

Respuesta

a) Al comparar con la ecuación (8)

$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{b_0\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

y al reordenar la ecuación de la función de transferencia para el tubo en U

$$\frac{H(s)}{P(s)} = \frac{1}{\rho L[s^2 + (R/\rho L)s + (2g/L)]}$$

entonces, $\omega_n = \sqrt{(2g/L)}$.

b) La comparación también proporciona $2\zeta\omega_n = (R/\rho L)$ y así

$$\zeta = \frac{R}{2\omega_n \rho L} = \frac{R}{2\rho L\sqrt{(2g/L)}} = \frac{R\sqrt{2}}{\rho\sqrt{(Lg)}}$$

c) La ecuación de la función de transferencia para el tubo en U se puede entonces escribir como

$$\frac{H(s)}{P(s)} = \frac{(1/2\rho g)\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

De este modo, para una entrada impulso de presión p, puesto que el problema establece que se presenta movimiento del líquido, es decir, existe oscilación, entonces ζ es menor que 1, la solución es de la forma dada por la ecuación (38), es decir,

$$\theta_o = \frac{b_0\omega_n}{\sqrt{(1-\zeta^2)}} \exp(-\zeta\omega_n t)\,\text{sen}\,[\omega_n\sqrt{(1-\zeta^2)}t]$$

Por lo tanto, al sustituir los valores del tubo en U

$$h = (1/2\rho g)\sqrt{(2g/L)}\exp\left\{-\left[\frac{R\sqrt{2}}{\rho\sqrt{(Lg)}}\sqrt{(2g/L)}\right]t\right\}$$

$$\text{sen}\left(\sqrt{(2g/L)}\sqrt{\left\{1-\left[\frac{R\sqrt{2}}{\rho\sqrt{(Lg)}}\right]^2\right\}}\right)t$$

$$h = \frac{1}{\rho\sqrt{(2gL)}}\exp\left[\left(\frac{2R}{\rho L}\right)t\right]\text{sen}\sqrt{\left(\frac{2g}{L} - \frac{4gR^2}{\rho^2 L^3}\right)}t$$

Problemas

1 Escribir la función de transferencia $G(s)$ para los sistemas dados por las siguientes relaciones entrada-salida:

a) Circuito RC con entrada v y salida i

$$v = Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

b) Circuito RLC con entrada v y salida v_C

$$v = \frac{v_C}{R} + C\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{L}\int v_C\,dt$$

c) Sistema hidráulico, un tubo en U con entrada q y salida h

$$p = \rho L\frac{d^2h}{dt^2} + RA\frac{dh}{dt} + 2h\rho g$$

d) Sistema masa-resorte-amortiguador con entrada F y salida x

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{dx}{dt} + x - \frac{F}{k}$$

2 ¿Cuáles son los órdenes de los elementos dados por las funciones de transferencia obtenidas en la solución del problema 1?

3 Describir el comportamiento de un sistema de primer orden cuando está sujeto a *a*) una entrada escalón, *b*) una entrada rampa y *c*) una entrada impulso.

4 Un sistema tiene la siguiente relación entre su salida θ_o y su entrada θ_i en el dominio de *s*. ¿Cuál es el estado del amortiguamiento en el sistema cuando está sujeto a una entrada escalón?

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{1}{s^2 - 6s - 16}$$

5 Un sistema de segundo orden tiene un factor de amortiguamiento relativo de 0.2, una frecuencia angular libre de 5 Hz y una función de transferencia en estado estable de 2. ¿Cuál es la relación entre la entrada y la salida en el dominio de *s* para el sistema y el sobrepaso en porcentaje cuando está sujeto a una entrada escalón?

6 Describir el comportamiento de un sistema de segundo orden cuando está sujeto a *a*) una entrada escalón, *b*) una entrada rampa y *c*) una entrada impulso.

7 ¿Cuál es la respuesta del sistema dado por la siguiente función de transferencia cuando está sujeto a una entrada escalón unitario?

$$\frac{s}{(s+3)^2}$$

8 Un sistema tiene la siguiente relación entre su salida θ_o y su entrada θ_i en el dominio de *s*. ¿Cuál es el error en estado estable cuando está sujeto a una entrada rampa?

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{400}{s^2 + 20s + 400}$$

9 Las oscilaciones de lado a lado de una embarcación debidas al oleaje, es decir, movimiento de ondulación, se puede describir mediante

$$\frac{\theta(s)}{H(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde θ es la deflección angular a partir de la vertical y h la altura de las olas. Con una frecuencia angular libre ω_n de 2 Hz y un factor de amortiguamiento relativo ζ de 0.1, ¿cómo varía la deflección angular con el tiempo para una súbita ola grande, es decir, un impulso?

10 ¿Cuál es la respuesta de un sistema dado por la siguiente función de transferencia cuando está sujeta a un impulso unitario?

$$G(s) = \frac{2}{(s+3)(s+4)}$$

6 Modelos mediante diagramas de bloques

Introducción

Establecer modelos para sistemas complicados es el resultado de enlazar algunos subsistemas o elementos, cada uno de los cuales tiene su propia función de transferencia. Los diagramas de bloques se pueden usar para representar cada uno de estos subsistemas y, el agrupamiento del arreglo enlazado, el sistema como un todo. En este capítulo la atención se centra en tales agrupamientos y cómo se determina la respuesta global del sistema a partir del conocimiento de la función de transferencia individual de cada bloque.

El diagrama de bloques

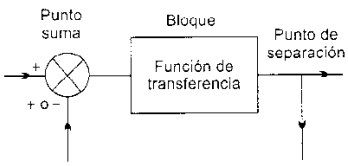


Figura 6.1 Elementos de un diagrama de bloques

La figura 6.1 muestra cómo representar los elementos en un diagrama de bloques. Las *flechas* se usan para representar las direcciones de flujo de la señal. Cuando las señales son funciones del tiempo se representan con letras minúsculas seguidas por (t), por ejemplo $i(t)$, aunque con frecuencia (t) se omite cuando es obvio que las señales son funciones del tiempo. Cuando las señales están en el dominio de s se representan con letras mayúsculas seguidas por (s), por ejemplo, $I(s)$. Un *punto suma* es en el que las señales se suman algebraicamente. Si una de las señales que entran a dicho punto se indica como positiva y la otra, como negativa, entonces dicha suma es la diferencia entre las dos señales. Si ambas señales se indican como positivas entonces la suma es la adición de las dos señales. En el capítulo 1 este punto suma, cuando se usó para comparar el valor requerido con una señal de realimentación que indica el valor real, se denominó *comparador*, la señal de realimentación se sustrae del valor deseado para obtener la señal de error. Cuando de algún punto de la trayectoria de la señal, se toma una señal, el *punto de separación* se representa de la misma forma, que en un circuito eléctrico, donde la unión entre dos conductores permite que la corriente se separe, es decir, la unión se representa mediante el encuentro de dos líneas y la unión se indica con '·'. En general el *bloque* se dibuja con la función de transferencia escrita dentro de él.

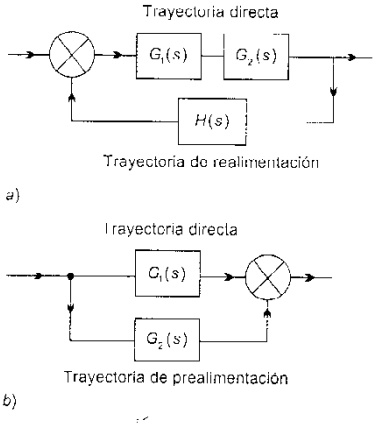


Figura 6.2 Trayectoria de la señal

El término *trayectoria directa* se usa para los elementos a través de los cuales pasa la señal en la dirección entrada-salida a lo largo del sistema (figura 6.2*a*). Las funciones de transferencia para los elementos en esta trayectoria directa en general se designan mediante G o $G(s)$. El término *trayectoria de realimentación* se usa para los elementos por los cuales pasa la señal cuando se alimenta de regreso desde la salida hacia la entrada (figura 6.2*a*). Las funciones de transferencia para los elementos en esta trayectoria de realimentación por lo común se designan por H o $H(s)$. El término *trayectoria de prealimentación* se usa para los elementos que están en paralelo con la trayectoria directa y a través de los cuales la señal se mueve en la misma dirección, es decir, entrada-salida (figura 6.2*b*).

Bloques en serie

Si el sistema consta de varios elementos en serie, por ejemplo, los dos elementos de la trayectoria directa en la figura 6.2*a*, entonces la función de transferencia del sistema $G(s)$ es

$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)}$$

Pero para el primer elemento se tiene

$$G_1(s) = \frac{\theta_{o1}(s)}{\theta_i(s)}$$

para el elemento 2

$$G_2(s) = \frac{\theta_{o2}(s)}{\theta_{o1}(s)}$$

y para el elemento 3

$$G_3(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_{o2}(s)}$$

Pero

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{\theta_{o1}(s)}{\theta_i(s)} \times \frac{\theta_{o2}(s)}{\theta_{o1}(s)} \times \frac{\theta_o(s)}{\theta_{o2}(s)}$$

De este modo

$$G(s) = G_1(s) \times G_2(s) \times G_3(s) \qquad [1]$$

Así, el número de bloques en serie, con funciones de transferencia $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, etcétera, se puede reemplazar por un solo bloque con una función de transferencia $G(s)$. Vea el capítulo 1 para la ob-

tención de las funciones de transferencia cuando se hace referencia a éstas sólo en estado estable.

De esta manera, para los dos elementos $G_1(s)$ y $G_2(s)$ en serie, si $\theta_i(s)$ es la entrada al arreglo y $\theta_o(s)$ la salida

$$\theta_o(s) = G(s)\theta_i(s) = G_1(s)G_2(s)\theta_i(s) \qquad [2]$$

Se supone que cuando los bloques individuales en los que no existe interacción, se conectan entre sí, producen cambios en la función de transferencia de los bloques individuales. Sólo si no existe tal interacción las funciones de transferencia de los bloques se pueden usar en forma aislada para obtener la función de transferencia global cuando éstos se combinan. De este modo, si los bloques individuales son circuitos eléctricos puede haber problemas al combinarlos debido a que los circuitos interactúan y se cargan unos a otros.

Ejemplo 1

Un sistema en lazo abierto consta de dos elementos en serie; los elementos tienen las funciones de transferencia que se indican en la figura 6.3. ¿Cuál es la función de transferencia del sistema como un todo?

Figura 6.3 Ejemplo 1

Respuesta

Para los bloques en serie, la ecuación [1] da por resultado

$$G(s) = G_1(s) \times G_2(s) \times G_3(s) \times \text{etcétera}$$

Por lo tanto

$$G(s) = \frac{2}{s+1} \times \frac{1}{s-1} = \frac{2}{s^2-1}$$

Bloques con lazos de realimentación

La figura 6.4*a* muestra un sistema en lazo cerrado sencillo con realimentación negativa. Con la realimentación negativa las señales de referencia y de realimentación se restan en el punto suma y con realimentación positiva éstas se suman. Si $\theta_i(s)$ es el valor de referencia, es decir, la entrada, y $\theta_o(s)$ es el valor real, es decir, la salida del sistema, entonces la función de transferencia del sistema de control completo es

$$\text{Función de transferencia} = \frac{\theta_i(s)}{\theta_o(s)}$$

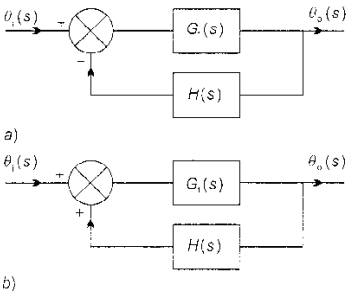


Figura 6.4 *a*) Realimentación negativa, *b*) realimentación positiva

Cada subsistema dentro del sistema global tiene su propia función de transferencia. Para la trayectoria de realimentación, la función de transferencia es $H(s)$; entonces, con su entrada $\theta_o(s)$ tendrá una salida $H(s)\theta_o(s)$ hacia la trayectoria directa. De esta manera, si la trayectoria directa del sistema tiene una función de transferencia $G_1(s)$, entonces, con su entrada $\theta_i(s) - H(s)\theta_o(s)$ y salida de $\theta_o(s)$.

$$G_1(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s) - H(s)\theta_o(s)}$$

Así, al reordenar ésta se obtiene

$$\theta_o(s)[1 + G_1(s)H(s)] = \theta_i(s)G_1(s) \qquad [3]$$

Por lo tanto, la función de transferencia global del sistema de control en lazo cerrado es

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)H(s)} \qquad [4]$$

Si la realimentación es positiva (figura 6.4*b*), entonces

$$\theta_o(s) = G_1(s)[\theta_i(s) + G_1(s)H(s)\theta_o(s)] \qquad [5]$$

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)H(s)} \qquad [6]$$

Ejemplo 2

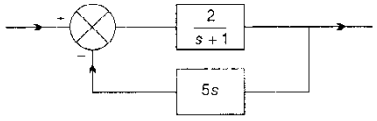


Figura 6.5 Ejemplo 2

¿Cuál es la función de transferencia global para el sistema que ilustra la figura 6.5?

Respuesta

La realimentación es negativa, por lo tanto, según la ecuación [4]

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)H(s)}$$

$$G(s) = \frac{2/(s+1)}{1 + 5s[2/(s+1)]} = \frac{2}{(s+1) + 10s} = \frac{2}{1 + 11s}$$

Bloques en serie y con un lazo de realimentación

Considere un sistema en lazo cerrado que consta de tres componentes en serie en la trayectoria directa y con un lazo de realimentación, como muestra la figura 6.6. La función de transferencia de la trayectoria directa es de esta manera

Función de transferencia de la trayectoria directa =
$$G_1(s) \times G_2(s) \times G_3(s)$$

El sistema en lazo cerrado se puede así reemplazar por el sistema equivalente más sencillo, como ilustra la figura 6.7. Ahora sólo se tiene un elemento con una función de transferencia de $G_1(s) \times G_2(s) \times G_3(s)$ y un lazo de realimentación con una función de transferencia $H(s)$. La función de transferencia global $G(s)$ para el sistema es, entonces

$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{G_1(s) \times G_2(s) \times G_3(s)}{1 + [G_1(s) \times G_2(s) \times G_3(s)]H(s)}$$

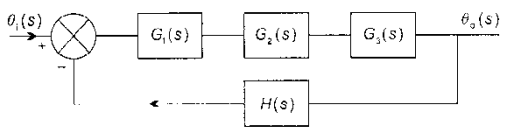


Figura 6.6 Función de transferencia de un sistema de lazo cerrado con elementos múltiples

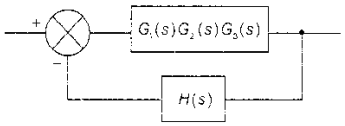


Figura 6.7 Sistema equivalente para la figura 6.6

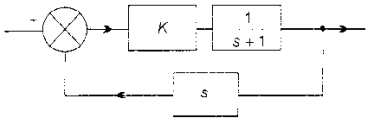


Figura 6.8 Ejemplo 3

Ejemplo 3

Un sistema de control (figura 6.8) tiene una trayectoria directa de dos elementos, la función de transferencia es K y $1/(s+1)$. Si la trayectoria de realimentación tiene una función de transferencia de s, ¿cuál es la función de transferencia en lazo cerrado?

Respuesta

Para los elementos de la trayectoria directa la función de transferencia global es, según la ecuación [1]

$$\text{Función de transferencia de la trayectoria directa } (s) = K \times \frac{1}{s+1}$$

Debido a que se tiene realimentación negativa, la función de transferencia global $G(s)$ es, al usar la ecuación [4]

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)H(s)}$$

$$G(s) = \frac{K/(s+1)}{1 + [sK/(s+1)]} = \frac{K}{1 + s(1+K)}$$

Bloques en paralelo

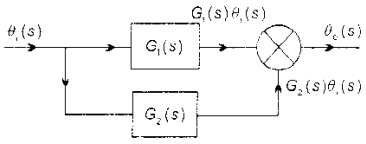


Figura 6.9 Lazo de prealimentación

La figura 6.9 muestra parte de un sistema de control con lazo de prealimentación. Para este sistema la señal de entrada a cada elemento es $\theta_i(s)$. De este modo, la salida del elemento con una función de transferencia $G_1(s)$ es $G_1(s)\theta_i(s)$ y la salida del elemento con una función de transferencia $G_2(s)$ es $G_2(s)\theta_i(s)$. En la figura las dos señales se muestran como adición en el punto suma. Por lo tanto, la salida $\theta_o(s)$ es

$$\theta_o(s) = G_1(s)\theta_i(s) + G_2(s)\theta_i(s) = [G_1(s) + G_2(s)]\theta_i(s) \qquad [7]$$

Por lo tanto, la función de transferencia global $G(s)$ es

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) \qquad [8]$$

Si las señales se hubieran sustraído en el punto suma, entonces se debería obtener

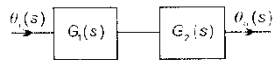
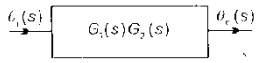
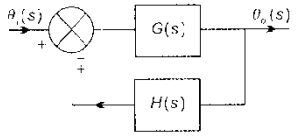
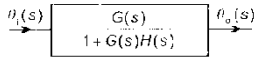
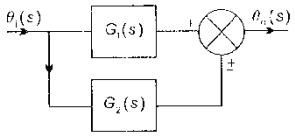
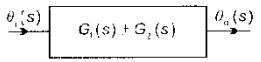
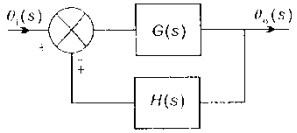
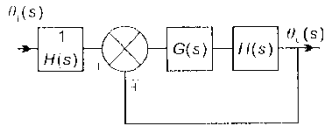
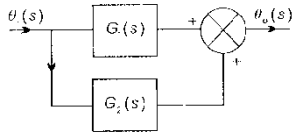
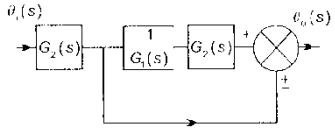
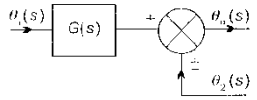
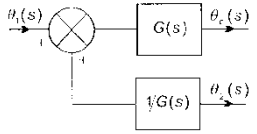
$$\theta_o(s) = [G_1(s) - G_2(s)]\theta_i(s) \qquad [9]$$

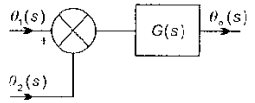
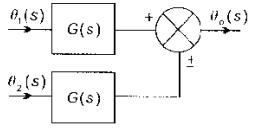
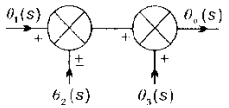
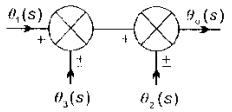
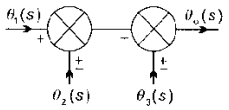
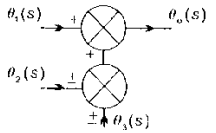
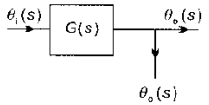
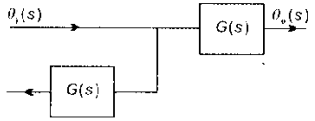
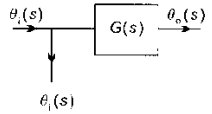
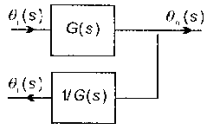
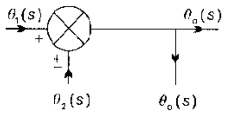
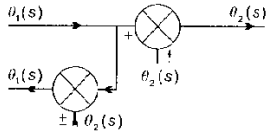
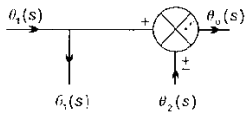
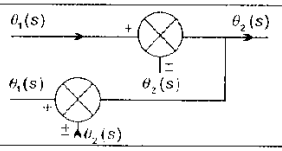
y

$$G(s) = G_1(s) - G_2(s) \qquad [10]$$

Ejemplo 4

Un lazo de prealimentación de la forma que muestra la figura 6.9 tiene funciones de transferencia de $G_1(s) = 1/(s+1)$ y $G_2(s) = 5$. ¿Cuál es la función de transferencia global si la señal del lazo de prealimentación se suma a la señal de la trayectoria directa?

Transformación	Diagrama original	Diagrama equivalente	Ecuación
1. Combinación de bloques en serie			$\theta_o(s) = [G_1(s)G_2(s)\theta_i(s)]$
2. Eliminación de un lazo de realimentación			$\theta_o(s) = G(s)[\theta_i(s) \pm H(s)\theta_o(s)]$
3. Eliminación de un lazo de prealimentación			$\theta_o(s) = [G_1(s) \pm G_2(s)]\theta_i(s)$
4. Remoción de un bloque de un lazo de realimentación			$\theta_o(s) = G(s)[\theta_i(s) \pm H\theta_o(s)]$
5. Remoción de un bloque de un lazo de prealimentación			$\theta_o(s) = [G_1(s) \pm G_2(s)]\theta_i(s)$
6. Movimiento de un punto suma antes de un bloque			$\theta_o(s) = G(s)\theta_1(s) \pm \theta_2(s)$

7. Movimiento de un punto suma después de un bloque			$\theta_o(s) = G(s)[\theta_1(s) \pm \theta_2(s)]$
8. Reacomodo de puntos suma			$\theta_o(s) = \theta_1(s) \pm \theta_2(s) \pm \theta_3(s)$
9. Reacomodo de puntos suma			$\theta_o(s) = \theta_1(s) \pm \theta_2(s) \pm \theta_3(s)$
10. Movimiento de un punto de separación antes de un bloque			$\theta_o(s) = G(s)\theta_i(s)$
11. Movimiento de un punto de separación después de un bloque			$\theta_o(s) = G(s)\theta_i(s)$
12. Movimiento de un punto de separación antes de un punto suma			$\theta_o(s) = \theta_1(s) \pm \theta_2(s)$
13. Movimiento de un punto de separación después de un punto suma			$\theta_o(s) = \theta_1(s) - \theta_2(s)$

Respuesta

Usando la ecuación [8]

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

$$G(s) = 5 + \frac{1}{s+1} = \frac{5s+5+1}{s+1} = \frac{5s+6}{s+1}$$

Simplificación de diagramas de bloques

La exposición anterior sólo representa algunos de los métodos de simplificación de diagramas de bloques. Así, varios bloques en serie se pueden reemplazar por un solo bloque, bloques con un lazo de realimentación se pueden sustituir por un solo bloque sin realimentación, y bloques con un lazo de prealimentación se pueden reemplazar por un solo bloque. En la tabla 6.1 se listan éstos y otros métodos que se pueden utilizar.

Ejemplo 5

Reducir el sistema que describe la figura 6.10 a un solo bloque y determinar la función de transferencia de ese bloque.

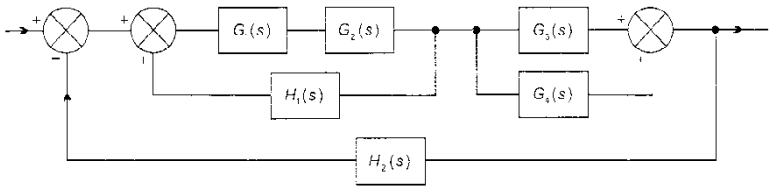


Figura 6.10 Ejemplo 5

Respuesta

La figura 6.11 muestra cómo se pueden combinar los bloques en varios pasos. Para simplificar las figuras, se ha omitido la indicación de que todas las funciones están en el dominio de s. De esta manera, en *a*) los dos bloques en serie $G_1(s)$ y $G_2(s)$ se combinan para dar un solo bloque usando la transformación 1 de la tabla 6.1 con una función de transferencia

$$G_1(s)G_2(s)$$

En *b*) el bloque del inciso anterior se combina, usando la transformación 2 de la tabla 6.1, con el bloque de la realimentación $H_1(s)$ para obtener un solo bloque con una función de transferencia

$$\frac{G_1(s)G_2(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)H_1(s)}$$

se utiliza el signo porque la realimentación es positiva. En *c*) la parte de prealimentación del diagrama se simplifica utilizando la transformación 3 de la tabla 6.1, para obtener un solo bloque con una función de transferencia

$$G_1(s) + G_2(s)$$

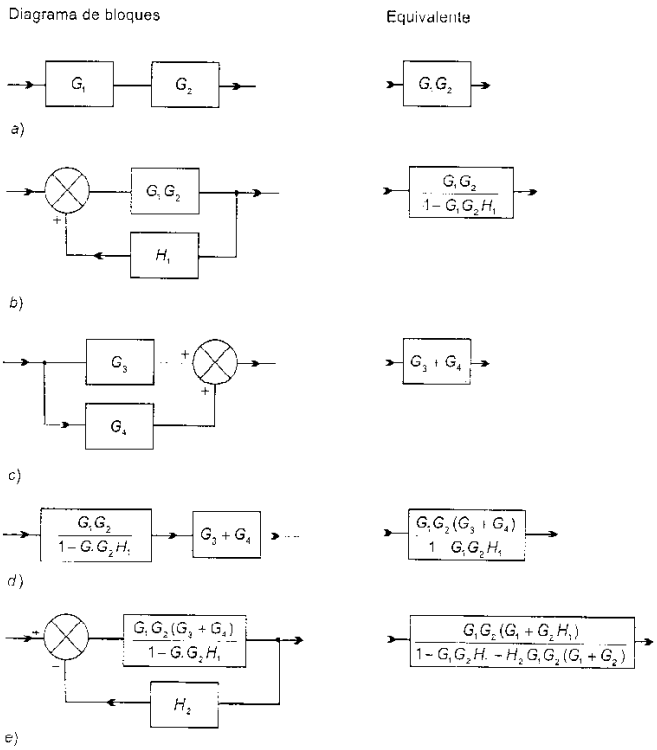


Figura 6.11 Ejemplo 5

En *d*) este equivalente del bloque prealimentado se combina con el bloque que se obtuvo en *b*) con la transformación 1 de la tabla 6.1, para obtener un solo bloque con una función de transferencia

$$\frac{G_1(s)G_2(s)[G_1(s)+G_2(s)]}{1-G_1(s)G_2(s)H_1(s)}$$

Por último, en *e*) este bloque se combina con su lazo de realimentación, utilizando la transformación 2 de la tabla 6.1, para obtener un solo bloque con una función de transferencia

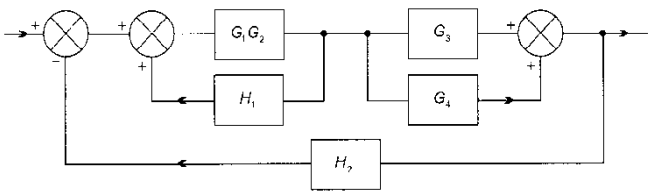
$$\frac{G_1(s)G_2(s)[G_1(s)+G_2(s)]/[1-G_1(s)G_2(s)H_1(s)]}{1+H_2(s)\{G_1(s)G_2(s)[G_1(s)+G_2(s)]/[1-G_1(s)G_2(s)H_1(s)]\}}$$

La cual se simplifica a

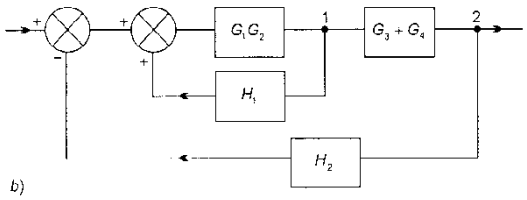
$$\frac{G_1(s)G_2(s)[G_1(s)+G_2(s)]}{1-G_1(s)G_2(s)H_1(s)+H_2(s)G_1(s)G_2(s)[G_1(s)+G_2(s)]}$$

Ejemplo 6

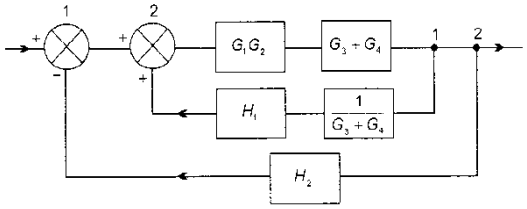
Reorganizar el diagrama de bloques del sistema descrito en la figura 6.10 de modo que el bloque de realimentación $H_1(s)$ esté aislado y los efectos de los cambios en su función de transferencia se puedan estudiar fácilmente.



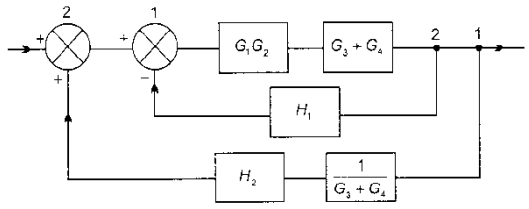
a)



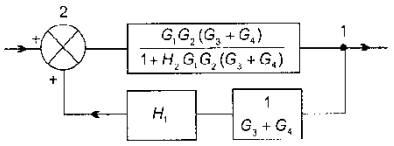
b)



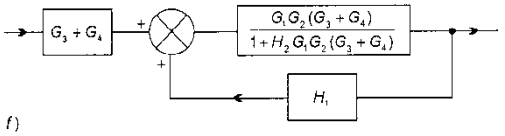
c)



d)



e)



f)

Figura 6.12 Ejemplo 6

Respuesta

La figura 6.12 detalla los pasos del procedimiento que se puede adoptar para aislar el bloque $H_1(s)$. Para simplificar en las figuras se omitió la indicación de que todos los bloques están en el dominio de s. En *a*) los dos bloques en serie se combinaron utilizando la transformación 1 de la tabla 6.1. En *b*) se eliminó el lazo de prealimentación con la transformación 3 de la tabla 6.1. En *c*) el punto de separación 1 se movió después del bloque $[G_3(s) + G_4(s)]$ utilizando la transformación 11 de la misma tabla. En *d*) los puntos suma 1 y 2 se reacomodaron mediante la transformación 9 de la tabla 6.1. En *e*) se eliminó el lazo interno de realimentación usando la transformación 2 de la tabla 6.1. En *f*) se usó la transformación 4 para remover un bloque del lazo de realimentación y así dar la solución requerida.

Ejemplo 7

Transformar el sistema que muestra la figura 6.13 en un diagrama de bloques con realimentación unitaria. Hay realimentación unitaria cuando la trayectoria de realimentación $H(s)$ se transforma a una con función de transferencia de realimentación de 1.

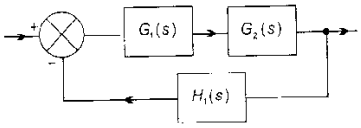


Figura 6.13 Ejemplo 7

Respuesta

Con base en la transformación 4 de la tabla 6.1 se obtiene el sistema que ilustra la figura 6.14.

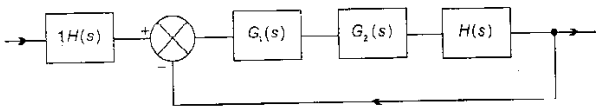


Figura 6.14 Ejemplo 7

Entradas múltiples

Con frecuencia en los sistemas de control existe más de una entrada al sistema. De este modo, se puede tener la señal de entrada que indica el valor requerido de la variable controlada y también una o varias entradas debidas a perturbaciones que afectan al sistema. El procedimiento para obtener la relación entre las entradas y la salida para esos sistemas es:

1. Hacer las entradas igual a cero, excepto una de ellas.
2. Transformar el diagrama de bloques resultante a uno que sólo tenga una trayectoria directa y una de realimentación.
3. Determinar, entonces, la señal de salida debida a la entrada que no es igual a cero.
4. Repetir los pasos 1, 2 y 3 para cada una de las entradas en turno.
5. La salida total del sistema es la suma algebraica de las salidas debidas a cada una de las entradas.

La figura 6.15 muestra un sistema de control básico con una entrada de referencia $\theta_i(s)$ y una entrada de perturbación $\theta_d(s)$. Al aplicar el procedimiento anterior se obtiene, igualando $\theta_d(s)$ a cero y después de alguna simplificación, el diagrama de bloques se muestra en la fi-

gura 6.16*a*). Para este sistema la relación entre la entrada $\theta_i(s)$ y la salida $\theta_o(s)$, utilizando la transformación 2 de la tabla 6.1, es

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \qquad [11]$$

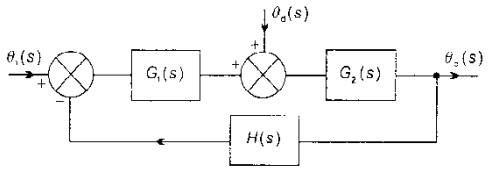
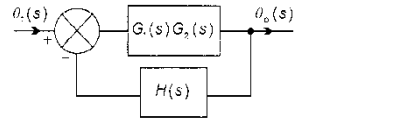


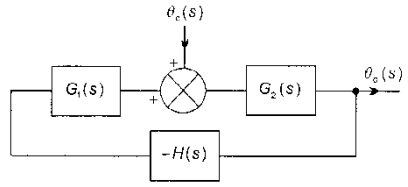
Figura 6.15 Sistema de control con entradas múltiples

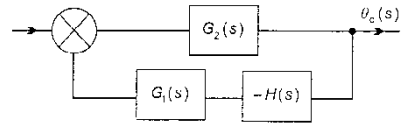
Ahora, al hacer $\theta_i(s)$ igual a 0 se obtiene el diagrama de bloques que muestra la figura 6.16*b*. Debido a que el lazo de realimentación proporciona una señal sustraída de la señal de entrada, es decir, se estaba utilizando realimentación negativa, es necesario representar la función de transferencia del lazo de realimentación como negativa, o sea, $-H(s)$. El sistema resultante es sólo una trayectoria directa con una función de transferencia $G_2(s)$ y una realimentación positiva con una función de transferencia $-G_1(s)H(s)$. De este modo, usando la transformación 2 en la tabla 6.1

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_d(s)} = \frac{G_2(s)}{1 - G_2(s)[-G_1(s)H(s)]} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \qquad [12]$$



a)





b)

Figura 6.16 *a)* $\theta_d(s) = 0$, *b)* $\theta_i(s) = 0$

Así, la salida total del sistema cuando está sujeto a ambas entradas es la suma que se da en las ecuaciones [11] y [12], es decir

$$\theta_o(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)\theta_i(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} + \frac{G_2(s)\theta_{d1}(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \qquad [13]$$

Vea el capítulo 1 para obtener la ecuación anterior en términos de las señales que pasan a través del sistema.

Ejemplo 8

Derivar la ecuación que describe la relación entre las entradas $\theta_i(s)$, $\theta_{d1}(s)$ y $\theta_{d2}(s)$ al sistema descrito en la figura 6.17 y la salida $\theta_o(s)$.

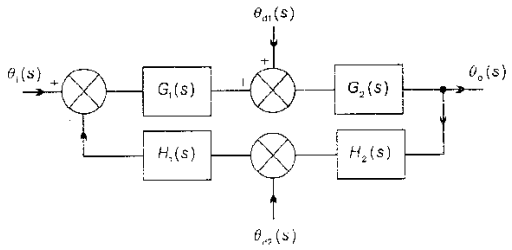


Figura 6.17 Ejemplo 8

Respuesta

Con $\theta_{d1}(s)$ y $\theta_{d2}(s)$ igualadas a cero, la transformación 2 de la tabla 6.1 da por resultado

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)}$$

Con $\theta_i(s)$ y $\theta_{d2}(s)$ igualadas a cero, el arreglo es como el que muestra la figura 6.18*a* y así

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_{d1}(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)}$$

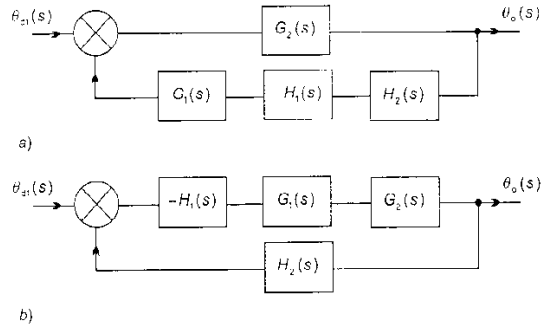


Figura 6.18 Ejemplo 8

Con $\theta_i(s)$ y $\theta_{d1}(s)$ igualadas a cero, el arreglo es como el que ilustra la figura 6.18*b*) y así

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_{d2}(s)} = -\frac{G_1(s)G_2(s)H_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)}$$

Por lo tanto, la salida total del sistema es

$$\theta_o(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)\theta_i(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)} + \frac{G_2(s)\theta_{d1}(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)} - \frac{G_1(s)G_2(s)H_1(s)\theta_{d2}(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)}$$

Ejemplos de sistemas

El *motor de cd* que se estudió en el capítulo 2 puede tener dos formas: controlado por armadura o controlado por campo. La figura 2.39 muestra estas formas básicas como diagramas de bloques con las ecuaciones que describen las relaciones entre la entrada y la salida a cada bloque. Al convertir estas ecuaciones a funciones de transferencia (vea el ejemplo 1*f* en el capítulo 5) da por resultado los diagramas de bloque de la figura 6.19.

Para el *motor controlado por armadura* (figura 6.19*a*), el circuito

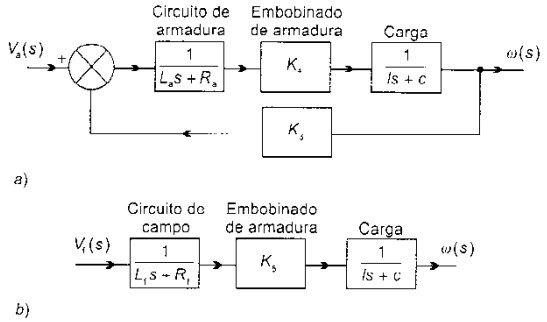


Figura 6.19 Motor de cd: *a*) controlado por armadura, *b*) controlado por campo

de armadura tiene una función de transferencia de primer orden que se puede escribir en la forma

$$\frac{1/R_a}{(L_a/R_a)+1} = \frac{1/R_a}{\tau_1 s+1}$$

donde τ_1 es la constante de tiempo para el circuito de armadura, $\tau_1 = L_a/R_a$. De manera similar, la función de transferencia para la carga se puede escribir como

$$\frac{1/c}{(1/c)s+1} = \frac{1/c}{\tau_2 s+1}$$

donde τ_2 es la constante de tiempo para la carga $\tau_2 = 1/c$.

La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema es, entonces

$$\frac{1/R_a}{\tau_1 s+1} \times k_4 \times \frac{1/c}{\tau_2 s+1}$$

La función de transferencia del sistema con su trayectoria de realimentación $\omega(s)/V_a(s)$ es, entonces, usando la transformación 2 de la tabla 6.1

$$G(s) = \frac{(1/R_a)k_4(1/c)/(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{1+k_3(1/R_a)k_4(1/c)/(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$
$$= \frac{(1/R_a)k_4(1/c)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)+k_3(1/R_a)k_4(1/c)} \qquad [14]$$

Al reordenar la ecuación [14] se obtiene

$$G(s) = \frac{(1/R_a)k_4(1/c)}{\tau_1\tau_2 s^2+(\tau_1+\tau_2)s+1+k_3(1/R_a)k_4(1/c)}$$
$$= \frac{[(1/R_a)k_4(1/c)]/(\tau_1\tau_2)}{s^2+[(\tau_1+\tau_2)/(\tau_1\tau_2)]s+[k_3(1/R_a)k_4(1/c)+1]/(\tau_1\tau_2)}$$

Ésta es una ecuación de segundo orden y se puede escribir en la forma

$$G(s) = \frac{K}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

donde ω_n es la frecuencia natural angular y ζ es el factor de amortiguamiento relativo. Por ejemplo, el comportamiento del sistema cuando está sujeto a una entrada escalón o a una entrada rampa es como se describe en el capítulo 5 para sistemas de segundo orden.

Para el *motor controlado por campo* (figura 6.19*b*), el circuito de campo es un sistema de primer orden y la función de transferencia se puede escribir como

$$\frac{1}{L_f s+R_f} = \frac{1/R_f}{\tau_1 s+1}$$

donde la constante de tiempo $\tau_1 = L_f/R_f$. El sistema que representa la carga es también un sistema de primer orden y su función de transferencia se puede escribir como

$$\frac{1/c}{(1/c)s+1} = \frac{1/c}{\tau_2 s+1}$$

donde τ_2 es la constante de tiempo para la carga $\tau_2 = 1/c$.

El motor controlado por campo es un sistema en lazo abierto. Por lo tanto, la función de transferencia global $\omega(s)/v_f(s)$ es

$$G(s) = \frac{1/R_f}{\tau_1 s+1} \times k_5 \times \frac{1/c}{\tau_2 s+1}$$
$$G(s) = \frac{(1/R_f)k_5(1/c)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} \qquad [15]$$

Éste es un sistema de segundo orden.

Con motores de cd la perturbación más probable es un par T_d a la carga. De esta manera, para tener en cuenta éste en motores controla-

dos por armadura y por campo se deben modificar los diagramas de bloques como muestra la figura 6.20. El efecto de la perturbación en la salida del motor controlado por armadura es modificar la salida que indica la ecuación [14] a

$$\omega(s) = \frac{(1/R_a)k_4(1/c)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)+k_3(1/R_a)k_4(1/c)} V_a(s) + \frac{(1/c)(\tau_1 s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)+(\tau_2 s+1)k_3 k_4(1/R_a)} T_d(s)$$

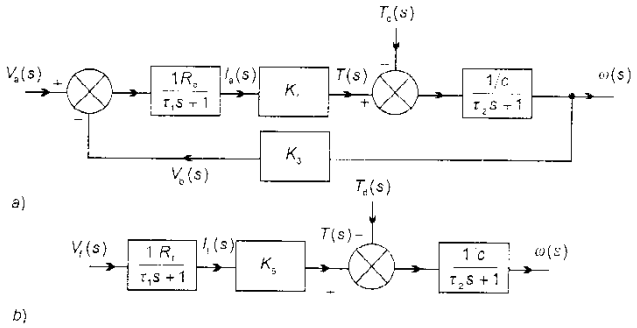


Figura 6.20 Motor de cd con perturbación de carga: *a*) controlado por armadura, *b*) controlado por campo

Un motor de cd se podría usar como parte de un *sistema de control de posición*, es decir, rotar la carga a un ángulo en particular. Puesto que la salida de los motores de cd mencionados se considera la velocidad angular ω es necesario tener en cuenta la adición de un bloque que convierta la velocidad angular a desplazamiento angular. Dado que la velocidad angular es la razón de cambio del desplazamiento angular, es decir, $\omega = d\theta/dt$, entonces

$$\int d\theta = \int \omega dt$$

Por lo tanto, en el dominio de s

$$\theta_o(s) = \frac{1}{s}\omega(s)$$

donde $\theta_o(s)$ es la salida en el dominio de s. De este modo, el bloque que se adiciona tiene la función de transferencia $1/s$ y, por lo tanto, para el motor controlado por armadura es como ilustra la figura 6.21. El lazo de realimentación en este caso es sólo la fuerza contraelec-

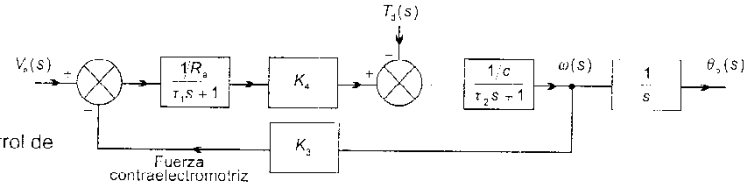


Figura 6.21 Sistema de control de posición con un motor de cd

tromotriz y, por lo tanto, ésta es una medida de la velocidad angular, el punto de separación para la realimentación está antes del bloque $1/s$ donde la salida de la carga es la velocidad angular en lugar del desplazamiento angular.

El desempeño del sistema de control de posición puede mejorar, desde el punto de vista de control, al incluir una segunda trayectoria de realimentación, si ésta es una medida de la posición angular de la carga, θ_0. La figura 6.22 muestra el sistema. El sistema de medición podría ser un potenciómetro rotacional o un transformador diferencial de variación angular (RVDT por sus siglas en inglés: *rotary variable differential transformer*), el cual da un voltaje proporcional a la posición angular. Esta señal de realimentación v_m se suma a la señal de voltaje de referencia v_r para dar una señal de error. La señal de voltaje de referencia se obtiene de la posición angular que fija un potenciómetro rotacional (vea el capítulo 2 para el análisis del potenciómetro). La señal de error se amplifica y rectifica antes de pasar al sistema con motor de cd. Este sistema de control se puede utilizar para controlar el movimiento de los brazos robot, la posición con máquinas herramientas, etcétera.

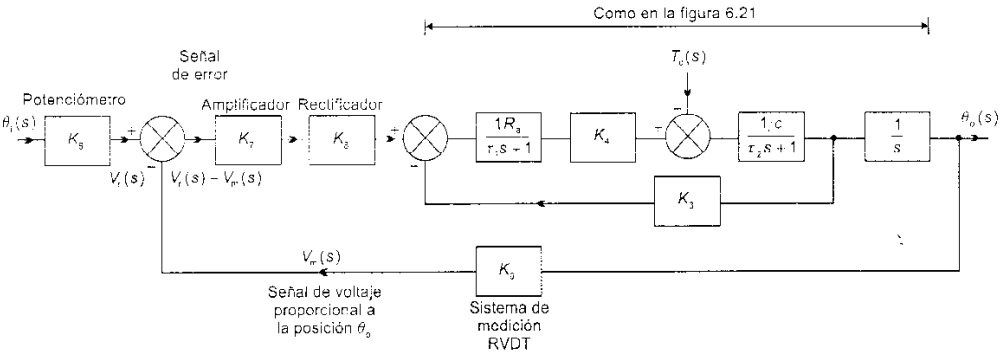


Figura 6.22 Sistema de control de posición con realimentación de la posición

Ejemplo 9

Obtener la relación entre las entradas del valor fijado de la altura del líquido h_i y la perturbación del nivel del líquido de d del sistema de nivel de líquido que describe la figura 6.23, y la salida de la altura del líquido h_0. De esta manera determinar cómo la salida variará con el tiempo cuando existe una entrada escalón al valor fijado, es decir, éste se fija súbitamente a un nuevo valor.

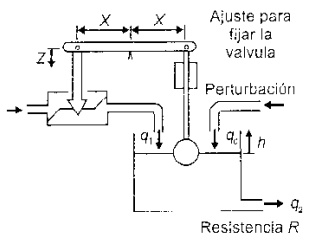


Figura 6.23 Ejemplo 9

El movimiento de un flotador produce la rotación de una varilla alrededor de un pivote y así, a través del actuador, se ajusta la apertura de la válvula. El punto de ajuste se puede fijar subiendo o bajando el punto de conexión del flotador a la varilla. La señal de error es la diferencia entre la posición del flotador cuando está en el nivel requerido y cuando se encuentra en cualquier otro nivel. El controlador es la varilla pivoteada cuya entrada, en uno de sus extremos, es la

señal de error del flotador y la salida, el punto donde se conecta el actuador.

Respuesta

Se puede considerar que el sistema tiene un diagrama de bloques como el que muestra la figura 6.24. La señal de error es la entrada a uno de los extremos de la varilla pivoteada y la salida es el movimiento del otro extremo de la varilla y, por lo tanto, el movimiento del vástago de la válvula. Este movimiento es la entrada al actuador de la válvula que produce la salida de una razón de flujo. Ésta, al sumarse con la perturbación, es la entrada a la planta, es decir, el líquido en el contenedor. La realimentación es el movimiento del flotador, el cual se traduce directamente en una señal de altura, por lo tanto, la trayectoria de realimentación es unitaria.

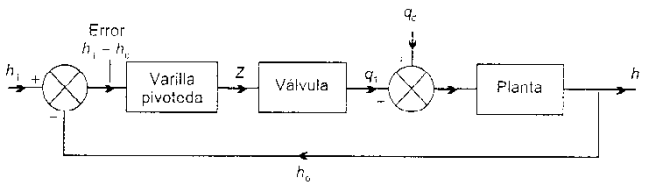


Figura 6.24 Ejemplo 9

La siguiente es una consideración de las funciones de transferencia de cada uno de los elementos en el sistema y, por lo tanto, la relación entre las entradas y la salida para el sistema como un todo.

a) *Varilla pivoteada.* La relación entre la salida y la entrada para la varilla pivoteada es

$$\frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{\text{salida a distancia del pivote}}{\text{entrada a distancia del pivote}}$$

Para una entrada h, la salida será z, donde

$$\frac{z}{h} = \frac{x}{y}$$

Así, la función de transferencia es (x/y).

b) *Sistema válvula.* La entrada z al sistema válvula determina la razón de flujo de salida q_1 de la válvula. La relación entre la entrada y la salida se puede linealizar (vea el capítulo 2) para obtener

$$q_1 = cz$$

c) *La planta.* El nivel se controla mediante la manipulación de la razón a la que el agua entra en el tanque. Si el agua entra a una razón de q_{ent} por segundo y sale a razón de q_{sal} por segundo, entonces la razón neta a la cual se incrementa el agua en el tanque es $(q_{ent} - q_{sal})$. En un tiempo δt el cambio en el volumen del agua en el tanque será $(q_{ent} - q_{sal})\delta t$. Si el tanque tiene un área de la sección transversal de A, entonces este cambio en el volumen producirá un cambio en el nivel del agua de δh, donde

$$(q_{ent} - q_{sal})\delta t = A\,\delta h$$

$$q_{ent} - q_{sal} = A\frac{\delta h}{\delta t}$$

Por lo tanto

$$q_{ent} - q_{sal} = A\frac{dh}{dt}$$

El flujo de salida del tanque se afectará por la altura del agua por arriba de la tubería de salida, es decir, la altura debida a la presión. Puesto que la presión debida a la altura del agua h es proporcional a h, se puede escribir

$$q_{sal} = \frac{h}{R}$$

donde R representa la resistencia hidráulica de la tubería de salida. De este modo

$$q_{ent} - \frac{h}{R} = A\frac{dh}{dt}$$

$$RA\frac{dh}{dt} + h = Rq_{ent}$$

La función de transferencia es, de esta manera,

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_{ent}(s)} = \frac{R}{RAs+1} = \frac{R}{\tau s+1}$$

donde $\tau = RA$ y es la constante de tiempo.

d) *El sistema.* Con $q_d = 0$, la trayectoria directa tiene una relación entre la salida y la entrada de

$$\frac{x}{y} \times c \times \frac{R}{\tau s+1}$$

Puesto que la trayectoria de realimentación tiene una función de transferencia unitaria, entonces

$$H(s) = \frac{(x/y)c[R/(\tau s+1)]}{1+(x/y)c[R/(\tau s+1)]}H_i(s)$$

Con $q_i(s) = 0$, la trayectoria directa tiene una función de transferencia de $R/(\tau s+1)$ y la trayectoria de realimentación una de $(x/y)c$. Por lo tanto

$$H(s) = \frac{R/(\tau s+1)}{1+(x/y)c[R/(\tau s+1)]}Q_d(s)$$

Por lo tanto, para el sistema con ambas entradas

$$H(s) = \frac{(x/y)c[R/(\tau s+1)]}{1+(x/y)c[R/(\tau s+1)]}H_i(s) + \frac{R/(\tau s+1)}{1+(x/y)c[R/(\tau s+1)]}Q_d(s)$$

e) *Entrada escalón.* Considere una entrada escalón al sistema, sin que se presente perturbación. Para esta situación la relación entre la entrada y la salida es

$$H(s) = \frac{(x/y)c[R/(\tau s+1)]}{1+(x/y)c[R/(\tau s+1)]} H_i(s)$$

$$H(s) = \frac{(x/y)cR}{\tau s+1+(x/y)cR} H_i(s)$$

Esta ecuación se puede simplificar si se definen dos constantes a y K como

$$a = \frac{1+(x/y)cR}{\tau}$$

$$K = \frac{(x/y)cR}{1+(x/y)cR}$$

Por lo tanto

$$H(s) = \frac{Ka}{s+a} H_i(s)$$

Una entrada escalón para $H_i(s)$ tiene la transformada de Laplace $1/s$, por lo tanto

$$H(s) = \frac{Ka}{s(s+a)}$$

La ecuación que daría esta transformada (vea el capítulo 4) es

$$h = K(1-e^{-at})$$

Éste es un crecimiento exponencial para alcanzar el valor en estado estable de K.

Problemas

1 ¿Cuáles son las funciones de transferencia globales de los sistemas que describen los diagramas de bloques de la figura 6.25?

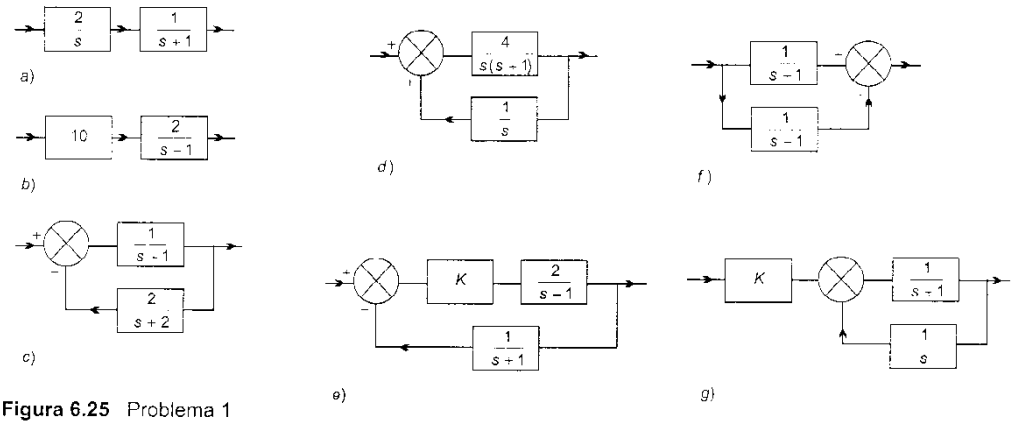


Figura 6.25 Problema 1

2 Convertir los diagramas de bloques de la figura 6.26 en sistemas equivalentes con realimentación unitaria.

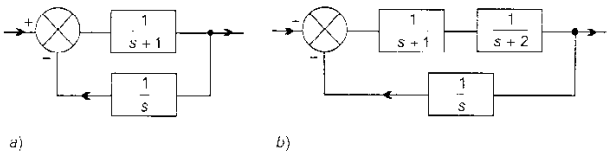


Figura 6.26 Problema 2

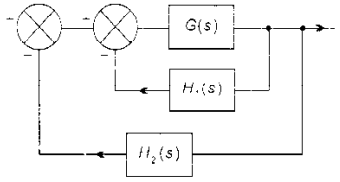


Figura 6.27 Problema 4

3 Verificar la transformación dada para remover un bloque del lazo de realimentación, transformación 4 de la tabla 6.1.

4 Simplificar el diagrama de bloques de la figura 6.27 de modo que el bloque $G(s)$ en la trayectoria directa quede aislado.

5 Derivar una ecuación que relacione las entradas $\theta_i(s)$, $\theta_{d1}(s)$ y $\theta_{d2}(s)$ y la salida para el sistema que describe la figura 6.28

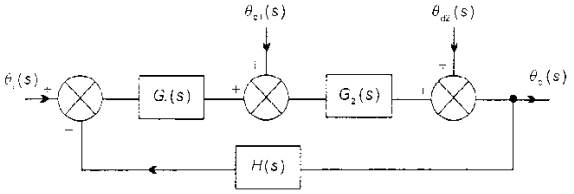
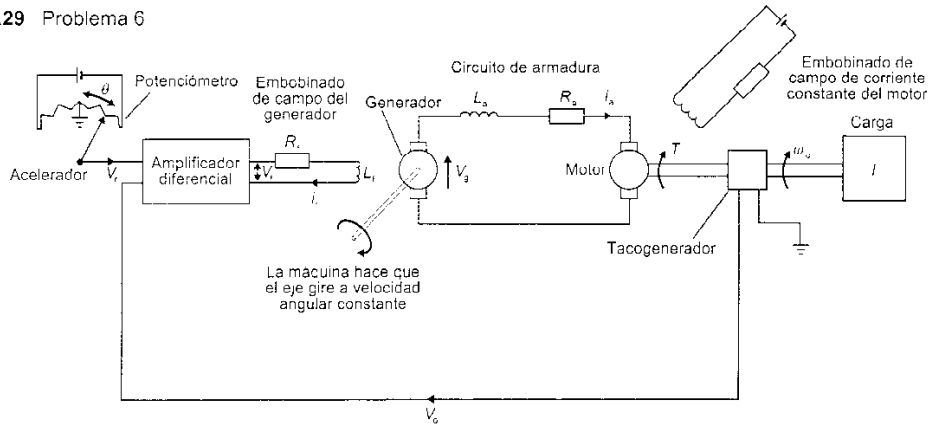


Figura 6.28 Problema 5

6 La figura 6.29 muestra un sistema de control de velocidad que se podría utilizar para controlar la velocidad de rotación de las ruedas de una locomotora de tren. Para manejar un generador eléctrico se usa una máquina alimentada con diesel: dicho generador, a su vez, maneja un motor y, por lo tanto, las ruedas de la locomotora. La posición de la palanca de marcha determina el voltaje de referencia que se alimenta al amplificador diferencial.

Figura 6.29 Problema 6



Ahí éste se compara con la señal de realimentación y se usa un voltaje de error amplificado para proporcionar la corriente al embobinado de campo del generador. La salida del generador está controlada por la corriente de campo debido a que el rotor gira a velocidad angular constante. La salida del generador suministra la corriente en el circuito de armadura del motor, el cual tiene como salida un par que hace girar una flecha sobre la cual están montadas las ruedas de la locomotora. Representar el sistema mediante un diagrama de bloques y derivar la ecuación que describa la relación entre el ángulo de la palanca de marcha θ y la velocidad angular de salida ω_o.

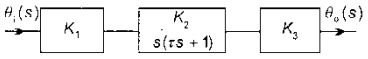


Figura 6.30 Problema 7

7 Un sistema de guiado asistido por potencia para un coche tiene la forma básica que muestra la figura 6.30, es decir, un sistema que convierte el movimiento rotatorio de la rueda de guiado en un movimiento lineal, un sistema hidráulico de la forma que se describió en la figura 2.43 con una válvula de carretes que maneja un pistón en el cilindro y, por lo tanto, una carga, y un sistema para convertir el movimiento lineal de la carga en un movimiento rotatorio. Derivar la relación entre el ángulo de entrada θ_i a la rueda de guiado y el ángulo de salida θ_o de la carga. De esta forma establecer cómo cambiará el ángulo de salida con el tiempo, si a la entrada hay una rampa unitaria.

8 Para girar una carga se utiliza un motor controlado por campo. Si la inductancia del embobinado de campo se puede considerar insignificante, derivar la relación entre la velocidad de salida ω_o cuando hay un escalón de voltaje de entrada de valor V al campo. Si el escalón es de 50 V, entonces la velocidad angular en estado estable es de 2 rad/s. La carga alcanza 1 rad/s en 0.35 s después que se aplica el escalón de voltaje. A partir de estos datos derivar la ecuación para la gráfica que describa cómo varía con el tiempo la velocidad de salida.

7 El error en estado estable

Introducción

Cuando a un sistema de control se aplica un comando de entrada, en general, se espera que después de que se desvanecen todos los efectos transitorios, la salida del sistema se asentará al valor del comando. El error entre este valor y el comando de entrada se denomina *error en estado estable*. Este error es una medida de la exactitud de un sistema de control a seguir una entrada de comando y es el error después de que decaen todas las respuestas transitorias a la entrada (vea el capítulo 5 para un estudio preliminar de este error en relación con la respuesta dinámica de los sistemas). El error en estado estable para un sistema depende del sistema en cuestión y de la forma que tome la entrada al sistema. A fin de realizar un análisis de los errores en estado estable de sistemas es útil clasificar los sistemas en *tipos de sistemas*. Esta variedad de tipos indica el error en estado estable que se presentará para cada una de las diferentes entradas. Este capítulo trata de la clasificación y la determinación de los errores en estado estable para sistemas.

Error en estado estable

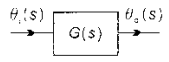


Figura 7.1 Sistema de control en lazo abierto

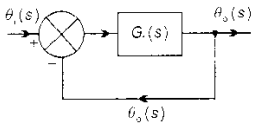


Figura 7.2 Sistema de control en lazo cerrado

El error en cualquier sistema es la diferencia entre la señal de salida requerida, es decir, la señal de entrada de referencia que especifica qué se requiere, y la señal de salida real que se presenta. Para un sistema de control en lazo abierto (figura 7.1) cuando hay una entrada $\theta_i(s)$ y una salida $\theta_o(s)$, el error $E(s)$ es, entonces,

$$E(s) = \theta_i(s) - \theta_o(s)$$

Puesto que la función de transferencia $G(s)$ es $\theta_o(s)/\theta_i(s)$ entonces

$$E(s) = \theta_i(s) - G(s)\theta_i(s) = [1 - G(s)]\theta_i(s) \qquad [1]$$

De esta manera, el error depende no sólo del sistema, como determina su función de transferencia, sino de la forma de la entrada $\theta_i(s)$.

Para un sistema en lazo cerrado, considere la simplificación de un sistema con realimentación unitaria (figura 7.2). Cuando existe una entrada de referencia $\theta_i(s)$ y una salida real $\theta_o(s)$ entonces la señal que se alimenta de regreso es $\theta_o(s)$ y, de esta manera el error $E(s)$ es

$$E(s) = \theta_i(s) - \theta_o(s)$$

Si $G(s)$ es la función de transferencia de la trayectoria directa, entonces existe realimentación unitaria

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Por lo tanto

$$E(s) = \theta_i(s) - \frac{G(s)\theta_i(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}\theta_i(s) \qquad [2]$$

De esta forma el error depende del sistema, como especifica su función de transferencia, y la forma de la entrada, $\theta_i(s)$.

Si el sistema de control en lazo cerrado tiene un lazo de realimentación con una función de transferencia $H(s)$, como en la figura 7.3*a*, entonces el sistema se puede convertir en uno con realimentación unitaria mediante el proceso que describe la figura 7.3*b*. El resultado es un sistema equivalente con realimentación unitaria de la forma que ilustra la figura 7.3*c*. La función de transferencia de la trayectoria directa está entonces dada por

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)[H(s) - 1]} \qquad [3]$$

Al simplificar el sistema mediante su conversión en uno con realimentación unitaria, permite usar la ecuación [2] para el error.

A fin de calcular el error en estado estable e_{ss} se utiliza el teorema del valor final (vea el capítulo 4). El error en estado estable es el valor del error, el cual es una función del tiempo t, cuando todos los transitorios han tenido tiempo para decaer y, por lo tanto, es el valor cuando t tiende a infinito. De acuerdo con el teorema del valor final esta condición está dada por

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) \qquad [4]$$

Así, para un sistema en lazo abierto, según la ecuación [1]

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \{s[1 - G(s)]\theta_i(s)\} \qquad [5]$$

y para un sistema en lazo cerrado con la ecuación [2]

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0}\left[s\frac{1}{1 + G(s)}\theta_i(s)\right] \qquad [6]$$

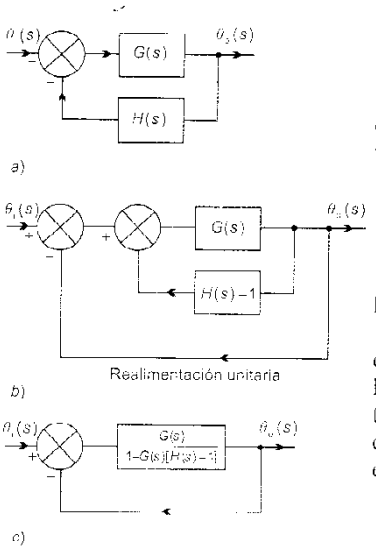


Figura 7.3 *a*) Sistema de control en lazo cerrado, *b*) conversión en realimentación unitaria, *c*) sistema equivalente con realimentación

Ejemplo 1

Calcular la magnitud del error en estado estable para *a*) un sistema en lazo abierto con una función de transferencia de $k / (\tau s + 1)$ y *b*) un sistema en lazo cerrado con realimentación unitaria y una función de transferencia en la trayectoria directa de $k / (\tau s + 1)$ cuando ambos están sujetos a una entrada escalón unitario de $1 / s$.

Respuesta

a) Con base en la ecuación [5]

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s\to 0}\{s[1-G(s)]\theta_i(s)\} \\ &= \lim_{s\to 0}\left[s\left(1-\frac{k}{\tau s+1}\right)\frac{1}{s}\right] \\ &= 1-k \end{aligned}$$

b) A partir de la ecuación [6]

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s\to 0}\left[s\frac{1}{1+G(s)}\theta_i(s)\right] \\ &= \lim_{s\to 0}\left[s\frac{1}{1+k/(\tau s+1)}\frac{1}{s}\right] \\ &= \frac{1}{1+k} \end{aligned}$$

Clasificación de sistemas

El error en estado estable para un sistema depende del valor de

$$\lim_{s\to 0} sE(s)$$

y el valor de $E(s)$ depende de la función de transferencia en la trayectoria directa de un sistema en lazo cerrado cuando hay realimentación unitaria. En el estudio de la clasificación de sistemas es importante considerar que en todos los casos de sistemas en lazo cerrado se supone que están en la forma que se tiene realimentación unitaria. Los sistemas se clasifican de acuerdo con el valor de la función de transferencia de la trayectoria directa cuando se tiene realimentación unitaria; ésta a menudo se denomina *función de transferencia en lazo abierto* del sistema en lazo cerrado. Para un sistema con función de transferencia de la trayectoria directa $G(s)$ y lazo de realimentación con función de transferencia $H(s)$, la función de transferencia en lazo abierto $G_o(s)$ está dada por la ecuación [3] como

$$G_o(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)[H(s)-1]} \qquad [7]$$

La función de transferencia en lazo abierto de los sistemas en general se puede representar mediante una ecuación de la forma

$$\frac{K(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + a_{m-2}s^{m-2} + \cdots + a_1 s + a_0)}{s^q(s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0)} \qquad [8]$$

donde K es una constante, m y n son enteros y ni a_0 ni b_0 pueden ser cero; q es un entero, el valor que se conoce como el *tipo* o *clase* del sistema. De este modo, si $q = 0$, entonces se dice que el sistema es de tipo 0; si $q = 1$, entonces es de tipo 1, y si $q = 2$, entonces es de tipo 2.

El tipo es, de esta manera, el número de factores $1/s$ en la función de transferencia en lazo abierto. Puesto que $1/s$ es integración (y en el

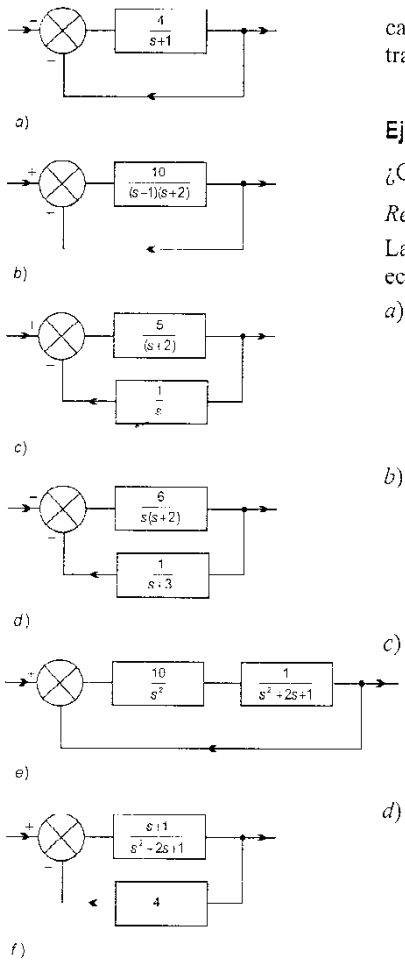


Figura 7.4 Ejemplo 2

capítulo 4), el tipo es el número de *integradores* en la función de transferencia en lazo abierto.

Ejemplo 2

¿Cuál es el tipo para los sistemas que se muestran en la figura 7.4?

Respuesta

La función de transferencia en lazo abierto se puede calcular con la ecuación [7].

a) El sistema tiene una función de transferencia en lazo abierto de

$$\frac{4}{(s+1)}$$

Puesto que no hay término independiente s en el denominador, el tipo es 0.

b) El sistema tiene una función de transferencia en lazo abierto de

$$\frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

Puesto que no hay término independiente s en el denominador, el tipo es 0.

c) El sistema tiene una función de transferencia en lazo abierto de

$$\frac{5/(s+2)}{1+[5/(s+2)][(1/s)-1]} = \frac{5s}{(s^2-3s+5)}$$

Puesto que no hay término independiente s en el denominador, el tipo es 0.

d) El sistema tiene una función de transferencia en lazo abierto de

$$\frac{6/[s(s+2)]}{1+\{6/[s(s+2)]\}[1/(s+3)-1]} = \frac{6(s+3)}{s^3+5s^2+9s-12}$$

Puesto que no hay término independiente s en el denominador, el tipo es 0.

e) El sistema tiene una función de transferencia en lazo abierto de

$$\frac{10}{s^2(s^2+2s+1)}$$

Puesto que hay término independiente s^2 en el denominador, el tipo es 2.

f) El sistema tiene una función de transferencia en lazo abierto de

$$\frac{(s+1)/(s^2+2s+1)}{1+[(s+1)/(s^2+2s+1)](4-1)} = \frac{s+1}{s^2+5s+4}$$

Puesto que no hay término independiente s en el denominador, el tipo es 0.

Error en estado estable para una entrada escalón

El error en estado estable e_{ss} para un sistema en lazo cerrado está dado por la ecuación [6] como

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left[s \frac{1}{1 + G_0(s)} \theta_i(s) \right]$$

donde $G_0(s)$ es la función de transferencia en lazo abierto. Una entrada escalón unitario es $\theta_i(s) = 1/s$. De esta manera, para tal entrada

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left[s \frac{1}{1 + G_0(s)} \frac{1}{s} \right]$$

$$= \lim_{s \to 0} \left[\frac{1}{1 + G_0(s)} \right] \qquad [9]$$

La función de transferencia en lazo abierto está dada por la ecuación [8] como

$$\frac{K(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + a_{m-2}s^{m-2} + \cdots + a_1 s + a_0)}{s^q(s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0)}$$

y así, cuando s tiende a cero, la función de transferencia en lazo abierto para un sistema de tipo 0 se convertirá en Ka_0/b_0, es decir, una constante, y para todos los otros tipos es infinito. Es más usual representar el valor de la función de transferencia en lazo abierto cuando $s \to 0$ como una constante K_p, donde K_p se conoce como *constante del error de posición* y es adimensional.

$$K_p = \lim_{s \to 0} G_0(s) \qquad [10]$$

De este modo, en términos de la ecuación anterior para la función de transferencia en lazo abierto

$$K_p = Ka_0/b_0 \qquad [11]$$

para un sistema de tipo 0 e infinito para todos los otros tipos.

La consecuencia de esto es que el error en estado estable para un sistema de tipo 0 será $1/[1 + (Ka_0/b_0)]$ o

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \qquad [12]$$

y para todos los otros tipos de sistemas será cero. La figura 7.5 muestra el tipo de respuesta que se podría presentar con un sistema de tipo 0. Después de que los transitorios, cualquiera que sea su forma, han desaparecido hay un error en estado estable de la forma $1/(1 + K_p)$.

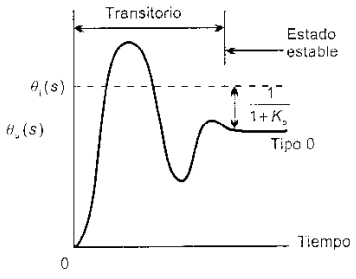


Figura 7.5 Error en estado estable con una entrada escalón

Lo anterior representa la situación cuando existe una entrada escalón unitario. Si la entrada fue un escalón de magnitud A, entonces el error en estado estable con un sistema de tipo 0 sería $A/(1 + K_p)$.

Con un sistema de tipo 0 la magnitud del error en estado estable con una entrada escalón unitario depende del valor de K_p: mientras mayor es su valor menor es el error. Pero K_p es directamente proporcional a K (ecuación [11]). K es el factor por el cual se multiplican las señales al pasar a través de la trayectoria directa del sistema. Por ejemplo, el sistema podría ser como el que ilustra la figura 7.6. Así, al incrementar el factor de amplificación o ganancia el error en estado estable se puede reducir.

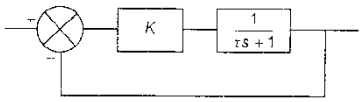


Figura 7.6 Un sistema tipo 0

Ejemplo 3

¿Cuáles son los errores en estado estable cuando se aplica una entrada escalón unitario a los sistemas dados por las siguientes funciones de transferencia en lazo abierto?

a) $\dfrac{4}{s+1}$

b) $\dfrac{10}{(s+1)(s+2)}$

c) $\dfrac{5}{s(s^2-3s+5)}$

d) $\dfrac{6(s+3)}{(s+2)(s+6)}$

e) $\dfrac{10}{s^2(s^2+2s+1)}$

Respuesta

a) El sistema es de tipo 0. Como $s \to 0$, $G_0(s)$ tiende a 4. Así, $K_p = 4$ y, de este modo, el error en estado estable es $1/(1+4) = 0.2$ unidades.

b) El sistema es de tipo 0. Como $s \to 0$, $G_0(s)$ tiende a 5. Así, $K_p = 5$ y, de este modo, el error en estado estable es $1/(1-5) = 0.17$ unidades.

c) El sistema es de tipo 1 y así el error en estado estable es cero.

d) El sistema es de tipo 0. Como $s \to 0$, $G_0(s)$ tiende a $-3/2$. Así, $K_p = -3/2$ y, de este modo, el error en estado estable es $1/(1-1.5) = -2.0$ unidades.

e) El sistema es de tipo 2 y así el error en estado estable es cero.

Error en estado estable para una entrada rampa

El error en estado estable e_{ss} para un sistema en lazo cerrado está dado por la ecuación [6] como

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left[s \frac{1}{1 + G_0(s)} \theta_i(s) \right]$$

donde $G_0(s)$ es la función de transferencia en lazo abierto. Una entrada rampa unitaria es $\theta_i(s) = 1/s^2$. Por lo tanto, para dicha entrada

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left[s \frac{1}{1 + G_0(s)} \frac{1}{s^2} \right]$$

$$= \lim_{s \to 0} \left[\frac{1}{s + sG_0(s)} \right] \qquad [13]$$

Como s tiende a cero, así el término s en el denominador se convierte en cero. De este modo, el factor que determina la magnitud del error es el valor de $sG_0(s)$ cuando $s \to 0$, es decir, la ecuación [13] se convierte en

$$e_{ss} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} sG_0(s)} \qquad [14]$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \qquad [15]$$

donde K_v es una constante conocida como *constante del error de velocidad*. Éste tiene las unidades de segundos^{-1}.

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_0(s) \qquad [16]$$

La función de transferencia en lazo abierto G_0 está dada por la ecuación [8] como

$$\frac{K(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + a_{m-2}s^{m-2} + \cdots + a_1 s + a_0)}{s^q(s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0)}$$

De este modo, el valor de $sG_0(s)$ es

$$\frac{sK(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + a_{m-2}s^{m-2} + \cdots + a_1 s + a_0)}{s^q(s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0)}$$

Para un sistema de tipo 0, $q = 0$, por lo tanto, $sK / s^q = sK$. Así, cuando s tiende a cero, $sG_0(s)$ para un sistema de tipo 0 será cero y entonces K_v es cero. De esta manera, el valor del error en estado estable será $1/0$ o infinito. Para un sistema de tipo 1, $q = 1$, por lo tanto, $sK/s^q = K$. Así, cuando s tiende a cero, $sG_0(s)$ se convertirá en Ka_0/b_0, es decir, éste es el valor de K_v. De esta manera, el valor del error en estado estable será $1/K_v$ o $1/(Ka_0/b_0)$. La figura 7.7 muestra el tipo de respuesta que podría presentar un sistema de tipo 1. Después de que los transitorios han desaparecido, cualquiera que sea su forma, hay un error en estado estable de $1/(K_v)$. Para un sistema de tipo 2, $q = 2$, por lo tanto, $sK/s^2 = K/s$. Así, cuando s tiende a cero, $sG_0(s)$ se hace infinito y, por lo tanto, el error en estado estable se hace cero.

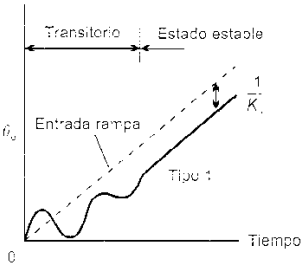


Figura 7.7 Error en estado estable con entrada rampa

Lo anterior representa la situación cuando existe una entrada rampa unitaria. Si la entrada es una rampa con una razón de cambio con el tiempo de una constante A entonces el error en estado estable con el sistema de tipo 1 sería A/K_v.

Ejemplo 4

¿Cuáles son los errores en estado estable cuando se aplica una entrada rampa unitaria a los sistemas que tienen las siguientes funciones de transferencia? Éstos son los sistemas usados en el ejemplo 3.

a) $\dfrac{4}{s+1}$

b) $\dfrac{10}{(s+1)(s+2)}$

c) $\dfrac{5}{s(s^2 - 3s + 5)}$

d) $\dfrac{6(s+3)}{(s+2)(s+6)}$

e) $\dfrac{10}{s^2(s^2 + 2s + 1)}$

Respuesta

a) El sistema es de tipo 0. Como $s \to 0$, $sG_o(s)$ tiende a 0. Así, $K_p = 0$ y, de este modo, el error en estado estable es infinito.
b) El sistema es de tipo 0. Como $s \to 0$, $sG_o(s)$ tiende a 0. Así, $K_p = 0$ y, de este modo, el error en estado estable es infinito.
c) El sistema es de tipo 1. Como $s > 0$, $sG_o(s)$ tiende a $5/5 = 1s^{-1}$ y, de este modo, el error en estado estable es de 1 unidad.
d) El sistema es de tipo 0. Como $s \to 0$, $sG_o(s)$ tiende a 0. Así, $K_p = 0$ y, de este modo, el error en estado estable es infinito.
e) El sistema es de tipo 2. Como $s \to 0$, $sG_o(s)$ tiende a infinito y así, el error en estado estable es cero.

Error en estado estable para una entrada parabólica

El error en estado estable e_{ss} para un sistema en lazo cerrado está dado por la ecuación [6] como

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left[s \frac{1}{1 + G_o(s)} \theta_i(s) \right]$$

donde $G_o(s)$ es la función de transferencia en lazo abierto. Una entrada parábola unitaria es $\theta_i(s) = 1/s^3$. De esta manera, para dicha entrada

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left[s \frac{1}{1 + G_o(s)} \frac{1}{s^3} \right]$$

$$= \lim_{s \to 0} \left[\frac{1}{s^2 + s^2 G_o(s)} \right] \qquad [17]$$

Como s tiende a cero, el término s^2 en el denominador se hace cero. Por lo que, el factor que determina la magnitud del error es el valor de $s^2 G_o(s)$ cuando $s \to 0$, es decir, la ecuación [17] se convierte en

$$e_{ss} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} s^2 G_o(s)} \qquad [18]$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} \qquad [19]$$

donde K_a es una constante conocida como *constante del error de aceleración* y que tiene las unidades de segundos^{-2}.

$$K_a = \lim_{s \to 0} sG_o(s) \qquad [20]$$

La función de transferencia en lazo abierto G_o está dada por la ecuación [8] como

$$\frac{K(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + a_{m-2}s^{m-2} + \cdots + a_1 s + a_0)}{s^q (s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0)}$$

De este modo, el valor de $s^2 G_o(s)$ es

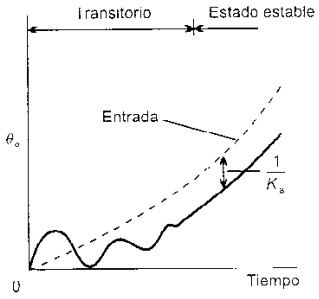


Figura 7.8 Error en estado estable con entrada parabólica

$$\frac{s^2K(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + a_{m-2}s^{m-2} + \cdots + a_1s + a_0)}{s^q(s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0)}$$

Para un sistema de tipo 0, $q = 0$, por lo tanto, $s^2K/s^q = s^2K$. Así, cuando s tiende a cero, $s^2G_0(s)$ para un sistema de tipo 0 será cero y K_a es cero. De esta manera, el valor del error en estado estable será 1/0 o infinito. Para un sistema de tipo 1, $q = 1$, por lo tanto, $s^2K/s^q = sK$. Así, cuando s tiende a cero, $s^2G_0(s)$ se hará cero y K_a es cero. De esta manera, el valor del error en estado estable será 1/0 o infinito. Para un sistema de tipo 2, $q = 2$, por lo tanto, $s^2K/s^q = K$. Así, cuando s tiende a cero, $s^2G_0(s)$ se convierte en Ka_0/b_0, es decir, éste es el valor de K_a. De esta forma, el valor del error en estado estable será $1/K_a$ o $1/(Ka_0/b_0)$. La figura 7.8 ilustra el tipo de respuesta que se podría presentar con un sistema de tipo 2. Después de que los transitorios, cualquiera que sea su forma, han desaparecido hay un error en estado estable de $1/(K_a)$. Para sistemas de tipos mayores a 2, cuando s tiende a cero, $s^2G_0(s)$ se hace infinito y, por lo tanto, el error en estado estable es cero.

Lo anterior representa la situación cuando existe una entrada parábola unitaria. Si la entrada fuera una parábola de la forma A/s^3, donde A es una constante, entonces el error en estado estable con el sistema de tipo 2 sería A/K_a.

Ejemplo 5

¿Cuáles son los errores en estado estable cuando se aplica una entrada parabólica unitaria a los sistemas que tienen las siguientes funciones de transferencia? Éstos son los sistemas mencionados en los ejemplos 3 y 4.

a) $\dfrac{4}{s+1}$

b) $\dfrac{10}{(s+1)(s+2)}$

c) $\dfrac{5}{s(s^2-3s+5)}$

d) $\dfrac{6(s+3)}{(s+2)(s+6)}$

e) $\dfrac{10}{s^2(s^2+2s+1)}$

Respuesta

a) El sistema es de tipo 0. Como $s \to 0$, $s^2G_0(s)$ tiende a 0. Así, $K_a = 0$ y, de este modo, el error en estado estable es infinito.

b) El sistema es de tipo 0. Como $s \to 0$, $s^2G_0(s)$ tiende a 0. Así, $K_a = 0$ y, de este modo, el error en estado estable es infinito.

c) El sistema es de tipo 1. Como $s \to 0$, $s^2G_0(s)$ tiende a 0. Así, $K_a = 0$ y, de este modo, el error en estado estable es infinito.

d) El sistema es de tipo 0. Como $s \to 0$, $s^2G_0(s)$ tiende a 0. Así, $K_a = 0$ y, de este modo, el error en estado estable es infinito.

e) El sistema es de tipo 2. Como $s \to 0, s^2 G_o(s)$ tiende a $10\,s^{-2}$. Así, $K_a = 10\,s^{-2}$ y, de este modo, el error en estado estable es 1/10 unidades.

Errores en estado estable para diferentes entradas

La tabla 7.1 y la figura 7.9 resumen lo hasta aquí expuesto en relación con los errores en estado estable que se pueden presentar con diferentes entradas para varios tipos de sistemas. Con sistemas lineales (vea el capítulo 2 para el estudio sobre linealidad), si una entrada θ_1 produce una salida θ_{o1} y una entrada θ_2 produce una salida θ_{o2}, entonces una entrada de $(\theta_1 + \theta_2)$ produce una salida de $(\theta_{o1} + \theta_{o2})$, situación que se conoce como *principio de superposición*. De este modo, si se tiene una entrada a un sistema lineal de, digamos $(1/s) + (1/s^2)$, entonces el error en estado estable es la suma de los errores debidos a cada segmento de la entrada si se consideraran en forma individual, es decir, el error debido a $(1/s)$ más el error debido a $(1/s^2)$.

Tabla 7.1 Errores en estado estable

	Errores en estado estable debidos a entradas unitarias			
Tipo de sistema	*Escalón* $1/s$	*Rampa* $1/s^2$	*Parábola* $1/s^3$	$1/s^4$
0	$1/(1+K_p)$	∞	∞	∞
1	0	$1/K_v$	∞	∞
2	0	0	$1/K_a$	∞
3	0	0	0	$1/K_j$
4	0	0	0	0

Ejemplo 6

Se requiere un sistema de control de un motor para un manejador de disco de computadora. Éste requiere operar con un error en estado estable cero cuando se aplica una señal de entrada rampa. ¿Qué tipo de sistema se requiere?

Respuesta

Para un error en estado estable cero con una señal de entrada rampa, la tabla 7.1 indica que el sistema debe ser de tipo 2 o mayor.

Ejemplo 7

Un brazo robot tiene una función de transferencia en lazo abierto para su posición angular de

$$G_o(s) = \frac{100}{s(s+5)(s+2)}$$

¿Cuál será el error en estado estable cuando la entrada es como indica la figura 7.10?

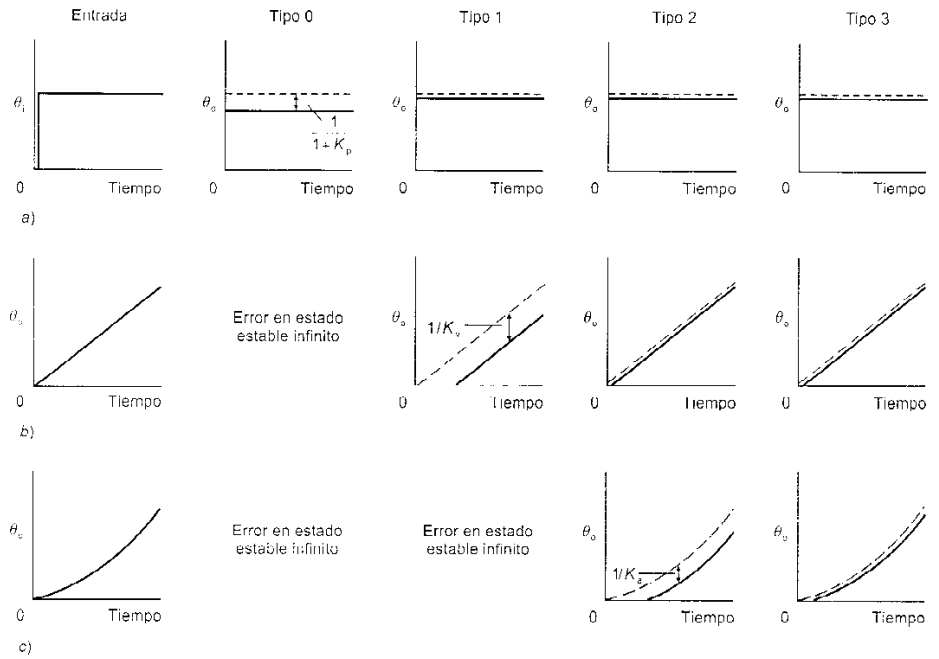


Figura 7.9 Errores en estado estable, *a*) entrada escalón, *b*) entrada rampa, *c*) entrada parabólica

Respuesta

El sistema es de tipo 1 y la entrada es una señal rampa de 10 grados por segundo. A medida que s tiende a cero, $sG_0(s)$ tiende a $100/10 = 10\,s^{-1}$. Entonces, $K_v = 10\,s^{-1}$ y, por lo tanto, el error en estado estable es, para una entrada rampa unitaria, $1/K_v$, y para una rampa que crece a razón de A es A/K_v, es decir, $10/10 = 1°$. De esta manera, la salida siempre está atrás de la entrada por 1°.

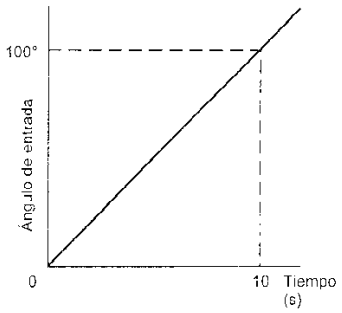


Figura 7.10 Ejemplo 7

Ejemplo 8

Determinar el error en estado estable que se presenta con un sistema lineal que tiene una función de transferencia en lazo abierto de

$$G_0(s) = \frac{2(s+1)}{s^2(s+4)}$$

cuando está sujeto a una entrada de

$$\theta_i(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^3}$$

Respuesta

El sistema es de tipo 2. Debido a que el sistema es lineal, el principio de superposición se puede aplicar de modo que el error total en estado estable sea la suma de los errores debidos a cada segmento de la señal de entrada. Por lo tanto, para la entrada $1/s$, una entrada escalón unitario, se tendrá un error cero. Para la entrada $2/s^2$ no habrá error,

siendo ésta una entrada rampa. Para la entrada $2/s^3$ habrá un error, siendo ésta una entrada parabólica. El valor de $s^2G_o(s)$ cuando s tiende a cero, es decir, K_a, es $2/4 = \frac{1}{2}s^{-1}$. Así, el error es $2/\frac{1}{2} = 4$ unidades.

Error en estado estable debido a perturbaciones

Considere el sistema que muestra la figura 7.11, donde además de la entrada referencia hay una entrada de perturbación. Ambas entradas pueden dar cabida a errores en estado estable.

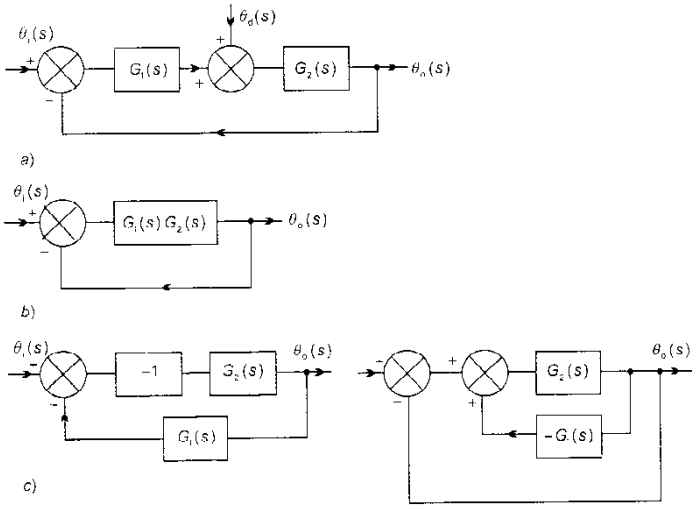


Figura 7.11 *a*) Sistema con realimentación unitaria con una perturbación, *b*) cuando $\theta_d(s) = 0$, *c*) cuando $\theta_i(s) = 0$

Siguiendo el procedimiento descrito en el capítulo 6, la función de transferencia en lazo abierto se determina para el caso cuando $\theta_d(s) - 0$, pero $\theta_i(s)$ es distinta de cero y así se determina el error en estado estable, entonces para cuando $\theta_i(s) = 0$, pero $\theta_d(s)$ no es cero. Los errores en estado estable cuando ambas entradas son diferentes de cero es, entonces, la suma de los dos errores derivados por separado. De esta manera, para $\theta_d(s) = 0$ se tiene

$$G_o(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

El error es la diferencia entre la entrada de referencia y la salida del sistema

$$E(s) = \theta_i(s) - \theta_o(s)$$

y así, puesto que $G_o(s) = \theta_o(s) / \theta_i(s)$,

$$E(s) = \theta_i(s) - \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}\theta_i(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)}\theta_i(s)$$

Por lo tanto, el error en estado estable es

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left[s \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} \theta_i(s) \right] \qquad [21]$$

Cuando $\theta_i(s) = 0$, entonces el sistema sólo está formado por una trayectoria directa con $G_2(s)$ y una trayectoria de realimentación con $G_1(s)$. Éste se puede convertir en un sistema con realimentación unitaria mediante el método que describe la figura 7.11, y así, la función de transferencia en lazo abierto es

$$G_o(s) = \frac{G_2(s)}{1 \cdot G_2(s)[-G_1(s) - 1]}$$

Así, el error es, puesto que $\theta_i(s) - 0$

$$E(s) = \theta_i(s) - \theta_o(s) = -\theta_o(s)$$

$$E(s) = -\frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)[G_1(s) + 1]} \theta_d(s)$$

Por lo tanto, el error en estado estable es

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left[-s \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)[G_1(s) + 1]} \theta_d(s) \right] \qquad [22]$$

El error total cuando existen ambas entradas, la de referencia y la de perturbación, es la suma de los errores dados por las ecuaciones [21] y [22].

Ejemplo 9

Un sistema de control de nivel de líquido, descrito en el ejemplo 9, capítulo 6, y por las figuras 6.23 y 6.24, se puede representar mediante un sistema como el que ilustra la figura 7.12. ¿Cuál es el error en estado estable cuando el sistema está sujeto a una entrada de perturbación de tipo escalón de magnitud A?

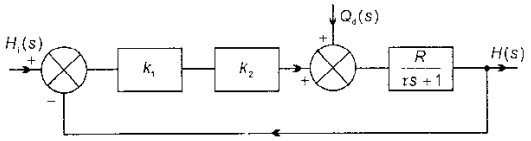


Figura 7.12 Ejemplo 9

Respuesta

La figura 7.13*a* muestra al sistema cuando no hay entrada de referencia y sólo existe la entrada de perturbación. La figura 7.13*b* ilustra cómo éste se puede reacomodar para dar un sistema con realimentación unitaria. Así, para dicho sistema la función de transferencia en lazo abierto es

$$G_o(s) = \frac{R/(\tau s + 1)}{1 + [R/(\tau s + 1)](k_1 k_2 + 1)}$$

Por lo tanto, la salida $H(s)$ se relaciona con la entrada $Q_d(s)$ por

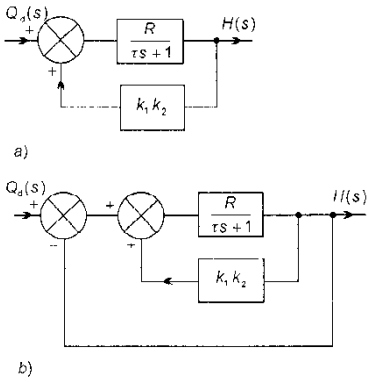


Figura 7.13 Ejemplo 9

$$H(s) = \frac{R/(\tau s+1)}{1+[R/(\tau s+1)](k_1k_2+1)} Q_d(s)$$

El error, puesto que $H_i(s) = 0$, es

$$E(s) = H_i(s) - H(s) = -H(s)$$

$$E(s) = -\frac{R/(\tau s+1)}{1+[R/(\tau s+1)](k_1k_2+1)} Q_d(s)$$

Por lo tanto, el error en estado estable cuando hay una entrada escalón A/s es

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left\{-s\frac{R/(\tau s+1)}{1+[R/(\tau s+1)](k_1k_2+1)}\frac{A}{s}\right\}$$

$$= \lim_{s\to 0}\left[\frac{RA}{\tau s+1+Rk_1k_2+R}\right]$$

$$= \frac{RA}{1+Rk_1k_2+R}$$

Problemas

1 Establecer el tipo de los sistemas que se dan en las siguientes funciones de transferencia en lazo abierto:

a) $\dfrac{5}{s+2}$

b) $\dfrac{2(s+1)}{s^2+2s+1}$

c) $\dfrac{6}{s(s+3)}$

d) $\dfrac{2}{s^2+4s}$

e) $\dfrac{2(s+3)}{s^2(s^2+2s+1)}$

2 ¿Cuáles son los tipos de los siguientes sistemas en lazo cerrado?

a) La función de transferencia de la trayectoria directa $1/(2s+1)$, la trayectoria de realimentación unitaria.

b) La función de transferencia de la trayectoria directa $1/(s+1)$, la función de transferencia de la trayectoria de realimentación 5.

c) La función de transferencia de la trayectoria directa $1/(s^2+2s+1)$, la función de transferencia de la trayectoria de realimentación $1/s$.

d) La función de transferencia de la trayectoria directa $2(s+1)/(s^2+5s)$, la función de transferencia de la trayectoria de realimentación $1/(s+1)$.

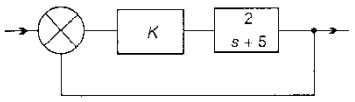


Figura 7.14 Problema 3

3 Calcular el error en estado estable para el sistema que describe la figura 7.14 cuando está sujeto a una entrada escalón unitario si K tiene el valor *a)* 1, *b)* 10 y comentar qué significa incrementar el valor de K.

4 El sistema de guiado de un automóvil tiene una función de transferencia en lazo abierto de

$$G_o(s) = \frac{K}{s(s+a)(s+b)}$$

¿Cuáles serán los errores en estado estable cuando el sistema de guiado está sujeto a *a*) una entrada escalón de magnitud A y *b*) una entrada rampa que cambia a razón de A?

5 ¿Cuáles son los errores en estado estable para los sistemas dados por las funciones de transferencia en lazo abierto listadas en el problema 1, si están sujetos a *i*) una entrada escalón unitario, *ii*) una entrada rampa unitaria, *iii*) una entrada parabólica unitaria?

6 Determinar el error en estado estable que se presentará con un sistema lineal que tiene una función de transferencia en lazo abierto de

$$\frac{10}{s(s+5)}$$

cuando está sujeto a una entrada de

$$\frac{2}{s} - \frac{3}{s^2}$$

7 ¿Cuáles son los tipos para el sistema que ilustra la figura 7.15 cuando está sujeto a *a*) la entrada de referencia y *b*) la perturbación?

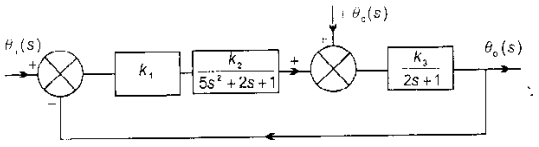


Figura 7.15 Problema 7

8 Polos, ceros y estabilidad

Introducción

Un requerimiento importante para un sistema de control es que debe ser estable. Esto significa que si al sistema se aplica una entrada de magnitud finita, entonces la salida debería también ser finita y de ningún modo infinita, es decir, incrementarse dentro de un límite (vea el capítulo 1 para una introducción a este concepto). Este capítulo trata las condiciones que se deben satisfacer para sistemas estables. Para sistemas lineales el requerimiento de estabilidad se puede definir en términos de los polos de la función de transferencia en lazo cerrado. Los *polos* son las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia y los *ceros* las raíces del polinomio del numerador de la función de transferencia.

Definiendo la estabilidad

Un sistema se puede definir como *estable* si toda entrada acotada, es decir, finita, produce una salida acotada. De esta manera, por ejemplo, para toda entrada escalón aplicada a un sistema la salida debe ser finita. Un sistema no es necesariamente estable si una sola entrada escalón produce una salida finita: toda entrada escalón debe producir salidas finitas.

De manera alternativa, un sistema se puede definir como estable si al estar sujeto a una entrada impulso la salida tiende a cero a medida que el tiempo tiende a infinito. Si, al responder a la entrada impulso, la salida del sistema tiende a infinito a medida que el tiempo tiende a infinito, entonces el sistema es *inestable*. Sin embargo, si la salida no tiende a cero o no crece a infinito, pero tiende a un valor finito diferente de cero, se dice entonces que el sistema es *crítica* o *marginalmente estable*. El capítulo 1 proporciona el ejemplo del sistema de una esfera sobre la superficie de una vasija. Si la esfera está dentro de la vasija, entonces es estable puesto que después de un impulso, la esfera terminaría, a medida que el tiempo tiende a infinito, en la misma posición: el centro de la vasija. Si la esfera está sobre la superficie convexa de la vasija (puesta al revés), entonces el impulso causaría que la esfera caiga y no regrese a su posición original a medida que el tiempo tiende a infinito. Este sistema es inestable. Si la esfera estuviera sobre una superficie plana, entonces el impulso produciría en ella un movimiento a lo largo de la superficie y, a medida

que el tiempo tiende a infinito, iría hacia el reposo en una posición estable a cierta distancia de su punto de inicio. Este sistema es crítica o marginalmente estable.

Ejemplo 1

¿Cuáles de los siguientes sistemas son estables?

a) Una entrada escalón al sistema produce una salida que se puede describir mediante la ecuación $\theta_o = 2t$.

b) Una entrada escalón al sistema produce una salida que se puede describir mediante la ecuación $\theta_o = 5$.

c) Un impulso aplicado al sistema produce una salida que se puede describir mediante la ecuación $\theta_o = e^{-t}$.

d) Un impulso aplicado al sistema produce una salida que se puede describir mediante la ecuación $\theta_o = e^{t}$.

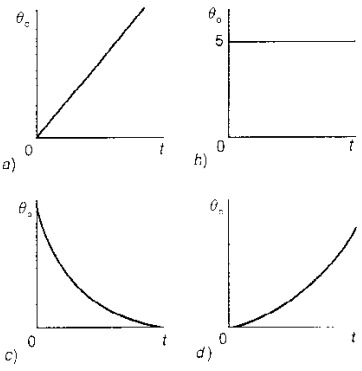


Figura 8.1 Problema 1

Respuesta

a) La figura 8.1*a* muestra la forma de la salida. Puesto que se incrementa y no se acota, el sistema es inestable.

b) La figura 8.1*b* ilustra la forma de la salida. Puesto que ésta se acota, es decir, es finita el sistema es estable.

c) La figura 8.1*c* describe la forma de la salida. Puesto que con el tiempo ésta se hace cero, es decir, tiende a cero a medida que el tiempo tiende a infinito, el sistema es estable.

d) La figura 8.1*d* muestra la forma de la salida. Puesto que continúa incrementándose y no se acota a medida que el tiempo tiende a infinito, el sistema es inestable.

Polos y ceros

La función de transferencia en lazo cerrado $G(s)$ de un sistema, en general se puede representar mediante

$$G(s) = \frac{K(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + a_{m-2}s^{m-2} + \cdots + a_1 s + a_0)}{(s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0)} \qquad [1]$$

y, si las raíces del denominador y del numerador se establecen como

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \qquad [2]$$

donde las raíces del numerador son $z_1, z_2, \ldots, z_m$ y se denominan *ceros* y las raíces del denominador son $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y se denominan *polos*, K es una constante multiplicadora o la ganancia del sistema.

Los ceros son los valores de s para los cuales la función de transferencia se convierte en cero. Los polos son los valores de s para los cuales la función de transferencia es infinita, es decir, éstos hacen que el valor del denominador sea cero. De esta manera, si el numerador es $(s-2)$, entonces la función de transferencia es cero si $(s-2)=0$, es decir, $s=+2$. Por lo tanto, el cero está en +2. Si el denominador es $(s+5)$, entonces la función de transferencia es infinita si $(s+5)=0$, es decir, $s=-5$. Por lo tanto, el polo está en −5.

Los polos y los ceros pueden ser cantidades reales o complejas. Así, por ejemplo, si el denominador fuera $(s^2 - 6s + 8)$, entonces, debido a que esto es $(s-4)(s-2)$, los polos están en +4 y +2. Sin embargo, si el denominador fuera $(s^2 + 1)$, entonces, puesto que éste se puede escribir como $(s-1\text{j})(s+1\text{j})$, los polos están en $+1\text{j}$ y -1j. En general, los polos y los ceros se pueden escribir como

$$s = \sigma + j\omega \qquad [3]$$

donde σ es la parte real y $j\omega$ es la parte imaginaria.

Como indica la ecuación [2], enunciar los valores de los ceros y los polos de un sistema, junto con el valor de una ganancia K, permite especificar por completo la función de transferencia del sistema.

Ejemplo 2

¿Cuáles son los ceros y polos de los sistemas dados por las siguientes funciones de transferencia en lazo cerrado?

a) $\dfrac{s-1}{s^2 - 4s + 4}$

b) $\dfrac{2(s+1)}{(s+1)(s+2)(s-3)}$

c) $\dfrac{(s+3)(s-1)}{s(s+2)(s+3)(s-4)}$

d) $\dfrac{s+4}{s^2 + 1s + 3}$

e) $\dfrac{1}{s^2 + s + 1}$

Respuesta

a) El denominador se puede escribir como $(s-2)(s-2)$ y así los polos están +2 y +2. El numerador es $(s-1)$ y así, el cero está en +1.

b) El denominador es $(s+1)(s+2)(s-3)$ y así, los polos están en −1, −2 y +3. El numerador es $2(s+1)$ y así, el cero está en −1.

c) El denominador es $(s-0)(s+2)(s+3)(s-4)$ y así, los polos están en 0, −2, −3 y +4. El numerador es $(s+3)(s-1)$ y así, los ceros está en −3 y +1.

d) El denominador es $(s^2 + 1s + 3)$. Las raíces se pueden obtener mediante la ecuación de las raíces m de una ecuación cuadrática, $(ax^2 + bx + c)$ es decir,

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo tanto, los polos de $(s^2 + 1s + 3)$ son

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 12}}{2}$$

$$= -0.5 \pm 0.5\sqrt{-1}\sqrt{12-1}$$

$$= -0.5 \pm j1.7$$

Por lo tanto, los polos están en $(-0.5 + j1.7)$ y $(-0.5 - j1.7)$. El numerador es $(s - 4)$ y, de este modo, el cero está en +4.

e) El denominador es $(s^2 + s + 1)$. Según la expresión anterior para el cálculo de las raíces

$$s = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$= -0.5 \pm 0.5\sqrt{-1}\sqrt{4-1}$$

$$= -0.5 + j0.87$$

Por lo tanto, los polos están en $(-0.5 + j0.87)$ y $(-0.5 - j0.87)$. El numerador es 1 una constante y, por lo tanto, no hay ceros.

Ejemplo 3

¿Cuáles son las funciones de transferencia de los sistemas que tienen los siguientes polos y ceros?

a) Polos en −1, −2; sin ceros.
b) Polos en +1, −2; cero en 0.
c) Polos en $(-2 \pm j1)$; cero en +1.
d) Polos en $(1 \pm j2)$; cero en −1.

Respuesta

a) El denominador será $(s + 1)(s + 2)$ y el numerador 1 (en ausencia de cualquier información sobre la ganancia K). Por lo tanto

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

b) El denominador será $(s - 1)(s + 2)$ y el numerador $(s - 0)$. Por lo tanto

$$G(s) = \frac{s}{(s-1)(s+2)}$$

c) El denominador será

$$[s - (-2 + j1)][s - (-2 - j1)]$$
$$= [s^2 - (-2 + j1)s - (-2 - j1)s + (-2 + j1)(-2 - j1)]$$
$$= [s^2 + 4s + 5]$$

El numerador es $(s - 1)$, y de esta manera

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2 + 4s + 5}$$

d) El denominador será

$$[s - (1 + j2)][s - (1 - j2)]$$
$$= [s^2 - (1 + j2)s - (1 - j2)s + (1 + j2)(1 - j2)]$$
$$= [s^2 - 2s + 5]$$

El numerador es $(s + 1)$ y, de esta manera

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 - 2s + 5}$$

Patrón de polos y ceros

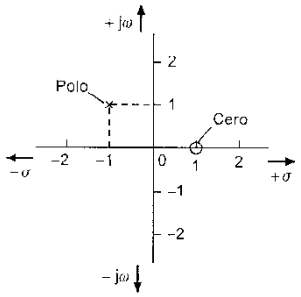


Figura 8.2 Patrón de polos y ceros

Los polos y los ceros de una función de transferencia se pueden representar en un diagrama llamado el *patrón de polos y ceros*. La figura 8.2 ilustra los ejes que se usan para dicha gráfica. El eje x es la parte real del polo o cero y el eje y, la parte imaginaria. La posición de un polo se marca con una cruz '×' y la posición de un cero por un pequeño círculo 'o'. De esta manera, en la figura se marca un polo que tiene una parte real de −1 y una parte imaginaria de +1, es decir, el polo está en (−1 + j1). El cero se marca en +1, y no tiene parte imaginaria.

La gráfica en dos dimensiones se conoce como *plano s*. Los polos o ceros en el lado izquierdo de la gráfica son todos negativos, los polos o ceros en el lado derecho son positivos. Los polos o ceros son reales o pares del tipo $(\sigma \pm j\omega)$.

Ejemplo 4

Dibujar los patrones de polos y ceros para los sistemas que tienen los siguientes polos y ceros.

a) Polos en −2, +3; cero en +1.
b) Polos en 0, −1, −2; cero en −3.
c) Polos en −1 + j2; cero en −1.
d) Polos en −2 ± j1, 0; ceros en −3 ± j2.

Respuesta

Vea la figura 8.3.

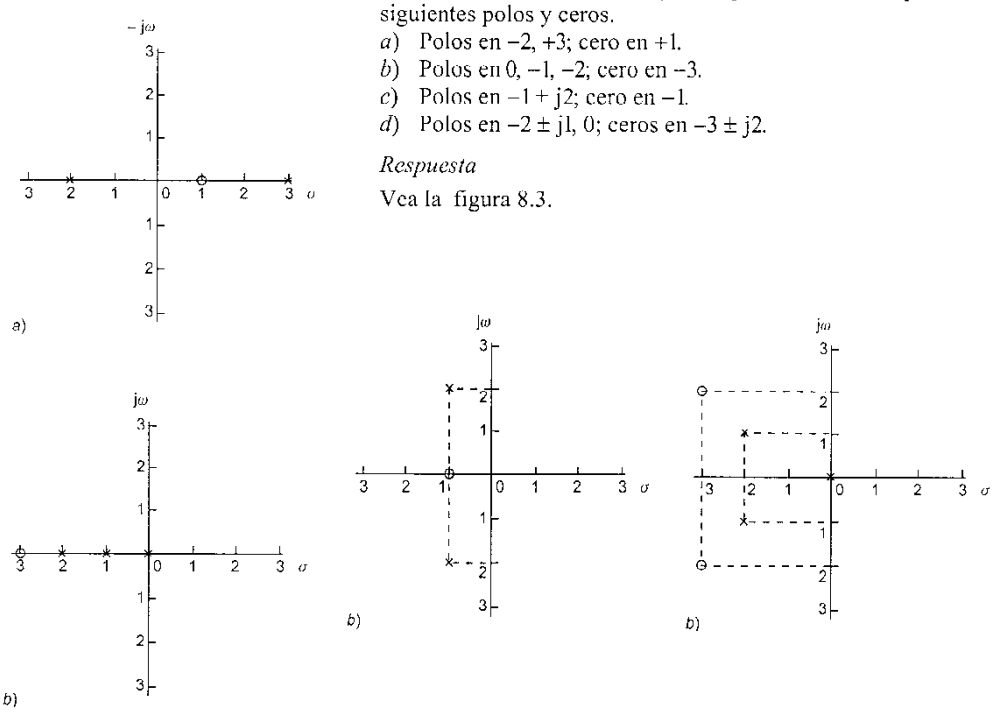


Figura 8.3 Ejemplo 4

Estabilidad y polos

La estabilidad de un sistema se puede determinar considerando cómo cambia la salida con el tiempo después de una entrada impulso. Con un sistema estable la salida deberá tender a cero con el tiempo, y con un sistema inestable la salida crecerá con el tiempo.

Considere un sistema sin ceros y un polo en −2. La función de transferencia $G(s)$ será

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

Por lo tanto, la salida $\theta_o(s)$ está relacionada con la entrada $\theta_i(s)$ mediante

$$\theta_o(s) = \frac{1}{s+2}\theta_i(s)$$

Si el sistema está sujeto a un impulso unitario, entonces $\theta_i(s) = 1$ y, de esta manera

$$\theta_o(s) = \frac{1}{s+2}$$

Ésta es una transformada de Laplace de la forma $1/(s+a)$ y así, la transformada inversa da por resultado

$$\theta_o = e^{-2t}$$

El valor de e^{-2t} decrece con el tiempo, haciéndose cero en un tiempo infinito. Por lo tanto, el sistema es estable.

Ahora considere un sistema sin ceros y un polo en +2. La función de transferencia $G(s)$ será

$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

Por lo tanto

$$\theta_o(s) = \frac{1}{s-2}\theta_i(s)$$

Para un impulso unitario, $\theta_i(s) = 1$ y, de esta manera

$$\theta_o(s) = \frac{1}{s-2}$$

Ésta es una transformada de Laplace de la forma $1/(s+a)$ y así, la transformada inversa da por resultado

$$\theta_o = e^{2t}$$

A medida que t se incrementa, el valor de e^{2t} también se incrementa, por lo tanto, el sistema es inestable.

Considere otro ejemplo, esta vez con polos en $(-2 \pm j1)$ y sin ceros. La función de transferencia es

$$G(s) = \frac{1}{[s-(-2+j1)][s \quad (\ 2 \quad j1)]}$$

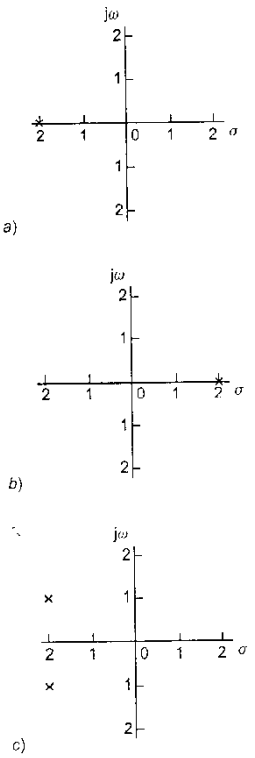


Figura 8.4 Patrones de polos y ceros y estabilidad, región de estabilidad compartida. *a*) Polo en −2 sin ceros: estable. *b*) Polo en +2 sin ceros: inestable. *c*) Polos en $-2 \pm j1$ sin ceros: estable.

y así

$$\theta_o(s) = \frac{1}{[s-(-2+j1)][s-(-2-j1)]}\theta_i(s)$$

Así, cuando hay un impulso unitario $\theta_i(s) = 1$ y, de esta manera

$$\theta_o(s) = \frac{1}{[s-(-2+j1)][s-(-2-j1)]}$$

Ésta es una transformada de Laplace de la forma $1/[(s+a)(s+b)]$ y así la transformada inversa es de la forma

$$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$$

con $a = -(-2+j1)$ y $b = -(-2-j1)$ se tiene

$$\theta_o = \frac{1}{j2}(e^{-2t}e^{jt} - e^{-2t}e^{-jt})$$

$$= e^{-2t}\left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{j2}\right)$$

El término entre los paréntesis es sen t. Por lo tanto

$$\theta_o = e^{-2t}\text{sen } t$$

Ésta es una onda senoidal, la cual tiene una amplitud que decrece con el tiempo de acuerdo con e^{-2t}. De esta manera, la salida decae con el tiempo y, por lo tanto, el sistema es estable.

En general, cuando a un sistema se aplica un impulso, la salida es de la forma de una suma de términos exponenciales. Si sólo uno de los términos exponenciales es una exponencial creciente, es decir, la exponencial de una función positiva de t tal como e^{2t}, entonces la salida crece de manera continua con el tiempo y el sistema es inestable. Esta situación se producirá si uno de los polos tiene parte real positiva y, de esta manera, el denominador de la función de transferencia incluye un término $(s-a)$. Cuando existen pares de polos que involucran $\pm j\omega$ entonces la salida es siempre una oscilación. Esta oscilación es estable si la parte real del par de polos es negativa e inestable si es positiva.

De esta manera, si todos los polos están en el lado izquierdo del patrón de polos y ceros, el sistema es estable. Si sólo uno de los polos está en el lado derecho de dicho patrón, éste es inestable. Un sistema es críticamente estable si uno o más polos están sobre el eje vertical del patrón de polos y ceros, es decir, tienen parte real cero, y no hay polos en el lado derecho. La figura 8.4 muestra las posiciones de los polos para los ejemplos anteriores y la figura 8.5 ilustra la forma general que toman las salidas para diferentes posiciones de los polos. Si sólo interesa la estabilidad, los polos de la función de transferencia son importantes y los valores de los ceros del sistema son irrelevantes.

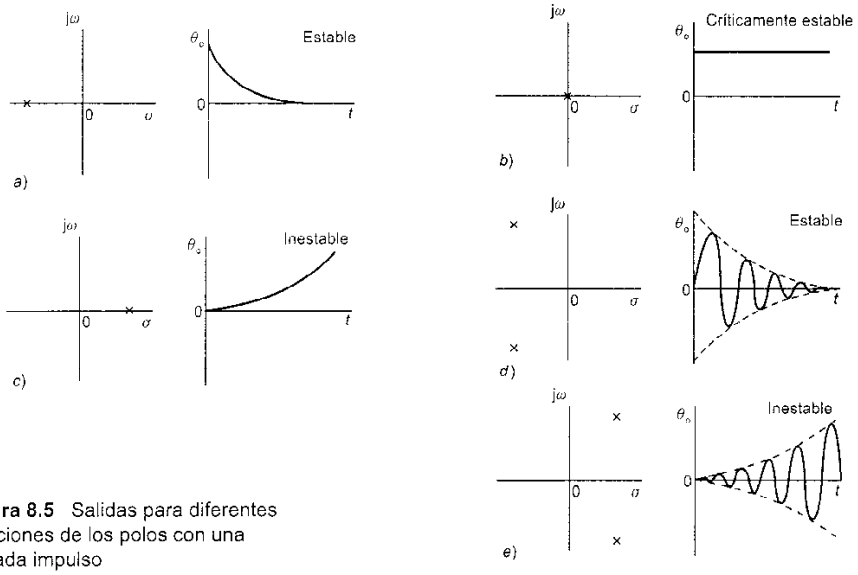


Figura 8.5 Salidas para diferentes posiciones de los polos con una entrada impulso

Una alternativa para el análisis de estabilidad anterior es considerar la estabilidad en términos de cómo cambia la salida con el tiempo después de una entrada escalón. Esto es una entrada acotada y para un sistema estable debería haber una salida acotada. Para la estabilidad en relación con las posiciones de los polos resulta la misma condición. La figura 8.6 indica las formas generales que toman las salidas para las diferentes posiciones de los polos.

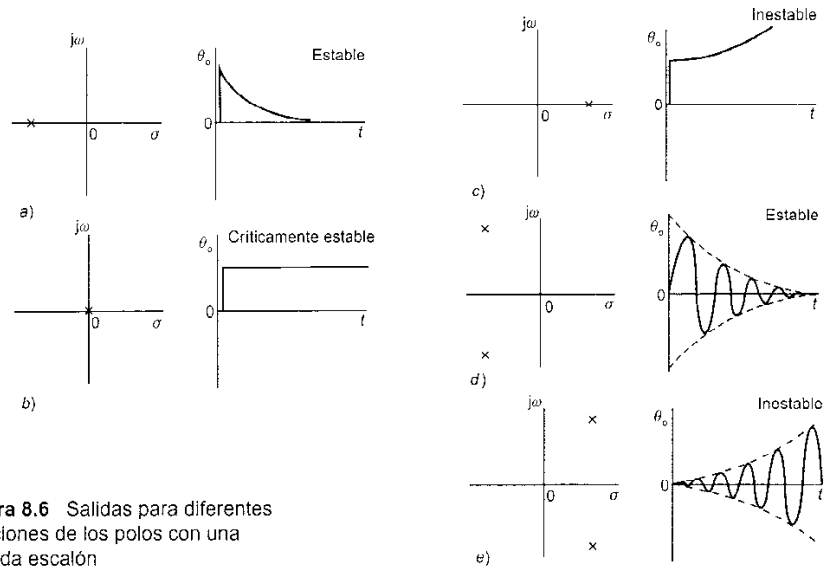


Figura 8.6 Salidas para diferentes posiciones de los polos con una entrada escalón

Ejemplo 5

¿Cuáles de los siguientes sistemas son estables, críticamente estables e inestables?

a) Polo en −4; cero en +1.
b) Polo en +1; sin ceros.
c) Polos en 0, − 1, − 2; cero en +1.
d) Polos en (−2 ± j3); sin ceros.
e) Polos en (1 ± j2); cero en −2.

Respuesta

Los valores de los ceros son irrelevantes. Para estabilidad todos los polos deben tener partes reales negativas. De este modo, *a* y *d* son estables. Para estabilidad crítica uno o más polos deben tener partes reales cero y ninguna debe ser positiva. Así, *c* es críticamente estable. Para inestabilidad uno o más de los polos deben tener partes reales positivas, de esta manera *b* y *e* son inestables.

El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

Determinar la estabilidad de un sistema dada su función de transferencia implica también determinar las raíces del polinomio del denominador de la función y considerar si cualesquiera de éstas son o no positivas. Sin embargo, las raíces no se pueden obtener con facilidad si el polinomio del denominador es de la forma

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 \qquad [4]$$

y n es mayor que 3 o 4. El *criterio de Routh-Hurwitz*, sin embargo, representa un método que se puede usar en tales situaciones.

La primera prueba que se aplica es revisar los coeficientes, es decir, los coeficientes de los términos en la expresión anterior. Si éstos son todos positivos y ninguno es cero, entonces el sistema puede ser estable. Si cualesquiera de los coeficientes es negativo, entonces el sistema es inestable. Si cualesquiera de los coeficientes es cero, entonces, en el mejor de los casos, el sistema es críticamente estable. De este modo, por ejemplo, el denominador $(s^3 + 2s^2 + 3s + 1)$ puede ser estable puesto que todos los coeficientes están presentes y son positivos. Sin embargo, $(s^3 - 2s^2 + 3s + 1)$ es inestable debido a que hay un coeficiente negativo. Con $(s^3 + 2s^2 + 3s)$ no hay un término y así, en el mejor de los casos, el sistema es críticamente estable.

Para sistemas que tienen denominadores que podrían ser estables se lleva a cabo una segunda prueba. Los coeficientes de la ecuación [4] se escriben en un orden particular denominado *arreglo de Routh*. Éste es

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$

Los renglones adicionales en el arreglo se determinan mediante cálculo a partir de los elementos de los dos renglones inmediatamente anteriores. Los renglones subsecuentes se calculan hasta que sólo aparecen ceros. El arreglo debería contener, entonces, $(n+1)$ renglones, un renglón corresponde a cada uno de los términos s^n hasta s^0.

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\cdots$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	$\cdots$
.	.	.	.	$\cdots$
.	.	.	.	..
.	.	.	.	.
s^2	x_1	x_2	x_3	
s^1	y_1	y_2		
s^0	z_1			

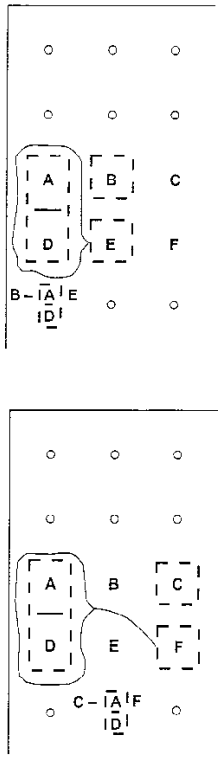


Figura 8.7 Determinación de los elementos en el arreglo Routh

Los elementos del tercer renglón se obtienen a partir de los elementos de los dos renglones previos mediante

$$b_1 = a_{n-2} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-3} \qquad [5]$$

$$b_2 = a_{n-4} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-5} \qquad [6]$$

Los elementos del cuarto renglón se obtienen a partir de los elementos de los dos renglones previos mediante

$$c_1 = a_{n-3} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1}\right) b_2 \qquad [7]$$

$$c_2 = a_{n-5} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1}\right) b_3 \qquad [8]$$

Una forma de recordar estas reglas para determinar los elementos se ilustra en la figura 8.7.

Cuando el arreglo se ha completado, éste se revisa. Si todos los elementos de la primera columna son positivos, todas las raíces tienen partes reales negativas, y están en el lado izquierdo del patrón de polos y ceros. El sistema es, entonces estable si todos los elementos de la primera columna son positivos. Si en la primera columna, hay elementos negativos, el número de cambios de signo en la primera columna es igual al número de raíces con partes reales positivas.

Ejemplo 6

Los siguientes polinomios son los denominadores de las funciones de transferencia de varios sistemas. Por inspección, ¿cuáles de éstos podrían ser estables, inestables y críticamente estables?

a) $s^4 + 3s^3 + 2s + 3$
b) $s^3 + 2s^2 + 3s + 1$
c) $s^5 - 4s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 5s + 2$
d) $s^5 + s^4 + 5s^3 + 2s^2 + 3s + 2$
e) $s^5 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$

Respuesta

Los polinomios *b* y *d* pueden ser estables debido a que todos los coeficientes son positivos y ninguno es cero. El polinomio *c* es inestable puesto que hay un término negativo. Los polinomios *a* y *e* son, en el mejor de los casos, críticamente estables.

Ejemplo 7

Usar el arreglo de Routh para determinar si el sistema que tiene la siguiente función de transferencia es o no estable.

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 1}$$

Respuesta

El denominador es $(s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 1)$ y por inspección todos los coeficientes son positivos y no falta ninguno. Por lo tanto, podría ser estable. A fin de asegurar que es estable, entonces se tiene que usar el arreglo de Routh. Los dos primeros renglones del arreglo son

$$\begin{array}{c|cc} s^4 & 1 & 3 & 1 \\ s^3 & 2 & 4 \end{array}$$

Los elementos del tercer renglón del arreglo se calculan usando las ecuaciones [5] y [6].

$$b_1 = a_{n-2} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-3}$$

$$b_1 = 3 - \left(\frac{1}{2}\right) 4 = 1$$

y

$$b_2 = a_{n-4} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-5}$$

$$b_2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right) 0 = 1$$

De esta manera, el arreglo se convierte en

$$\begin{array}{c|cc} s^4 & 1 & 3 & 1 \\ s^3 & 2 & 4 \\ s^2 & 1 & 1 \end{array}$$

Los elementos del cuarto renglón del arreglo se calculan usando las ecuaciones [7] y [8].

$$c_1 = a_{n-3} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1}\right) b_2$$

$$c_1 = 4 - \left(\frac{2}{1}\right) 1 = 2$$

y

$$c_2 = a_{n-5} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1}\right) b_3$$

$$c_2 = 0 - \left(\frac{2}{1}\right) 0 = 0$$

De esta manera, el arreglo se convierte en

s^4	1	3	1
s^3	2	4	
s^2	1	1	
s^1	2		

El elemento del quinto renglón se calcula usando

$$d_1 = b_2 - \left(\frac{b_1}{c_1}\right) c_2$$

$$d_1 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right) 0 = 1$$

De esta manera, el arreglo se convierte en

s^4	1	3	1
s^3	2	4	
s^2	1	1	
s^1	2		
s^0	1		

Todos los elementos de la primera columna son positivos y, por lo tanto el sistema es estable.

Ejemplo 8

Con base en el arreglo de Routh determinar si el sistema que tiene la siguiente función de transferencia es o no estable:

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^4 + s^3 + s^2 + 4s + 1}$$

Respuesta

El denominador es $(s^4 + s^3 + s^2 + 4s + 1)$ y por inspección todos los coeficientes son positivos y no falta ninguno. Por lo tanto, podría ser estable. A fin de asegurar que es estable, se tiene que usar el arreglo de Routh. Los dos primeros renglones del arreglo son

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 1 & 1 \\ s^3 & 1 & 4 & \end{array}$$

Los elementos del tercer renglón del arreglo se calculan usando las ecuaciones [5] y [6].

$$b_1 = a_{n-2} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-3}$$

$$b_1 = 1 - \left(\frac{1}{1}\right) 4 = -3$$

y

$$b_2 = a_{n-4} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-5}$$

$$b_2 = 1 - \left(\frac{1}{1}\right) 0 = 1$$

De esta manera, el arreglo se convierte en

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 1 & 1 \\ s^3 & 1 & 4 & \\ s^2 & -3 & 1 & \end{array}$$

Los elementos del cuarto renglón del arreglo se calculan usando las ecuaciones [7] y [8].

$$c_1 = a_{n-3} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1}\right) b_2$$

$$c_1 = 4 - \left(\frac{1}{-3}\right) 1 = \frac{13}{3}$$

y

$$c_2 = a_{n-5} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1}\right) b_3$$

$$c_2 = 0 - \left(\frac{1}{-3}\right) 0 = 0$$

De esta manera el arreglo se convierte en

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 1 & 1 \\ s^3 & 1 & 4 & \\ s^2 & -3 & 1 & \\ s^1 & 13/3 & & \end{array}$$

El elemento del quinto renglón se calcula usando

$$d_1 = b_2 - \left(\frac{b_1}{c_1}\right) c_2$$

$$d_1 = 1 - \left(\frac{3}{13/3}\right)0 = 1$$

De esta manera, el arreglo se convierte en

s^4	1	1	1
s^3	1	4	
s^2	−3	1	
s^1	13/3		
s^0	1		

La primera columna tiene un elemento negativo y, por eso, el sistema es inestable. Hay dos cambios de signo, de más a menos y de menos a más, así, el sistema tiene dos polos con partes reales positivas.

Ejemplo 9

El denominador de la función de transferencia de un sistema es

$$s^3 + 4s^2 + 8s + K$$

¿En qué intervalo de valores puede estar K si el sistema debe ser estable?

Respuesta

Los dos primeros renglones del arreglo de Routh son

s^3	1	8	1
s^2	4	K	

Los elementos del tercer renglón del arreglo se calculan usando las ecuaciones [5] y [6].

$$b_1 = a_{n-2} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)a_{n-3}$$

$$b_1 = 8 - \left(\frac{1}{4}\right)K$$

y

$$b_2 = 0 - \left(\frac{1}{4}\right)0 = 0$$

De esta manera, el arreglo se convierte en

s^3	1	8	
s^2	4	K	
s^1	$8 - \frac{1}{4}K$	0	

El elemento del cuarto renglón del arreglo se calcula usando la ecuación [7].

$$c_1 = a_{n-3} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1}\right)b_2$$

$$c_1 = K - \left(\frac{4}{8 - \frac{1}{4}K}\right)0 = K$$

Por lo tanto, el arreglo se convierte en

s^3	1	8
s^2	4	K
s^1	$8-\frac{1}{4}K$	0
s^0	K	

Para que el sistema sea estable todos los elementos de la primera columna deben ser positivos. Esto significa que

$$(8-\tfrac{1}{4}K)>0$$

y

$$K>0$$

Esto significa que $8>\frac{1}{4}K$ y, por lo tanto, $32>K$. De esta manera, K debe estar entre 0 y 32.

Ejemplo 10

Para el sistema que describe en la figura 8.8, ¿qué intervalo de valores de K dará como resultado la estabilidad?

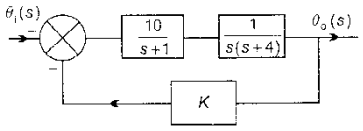


Figura 8.8 Ejemplo 10

Respuesta

La función de transferencia global está dada por

$$\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

y así, puesto que la función de transferencia de la trayectoria directa es $10/[s(s+1)(s+4)]$, es

$$\frac{10/[s(s+1)(s+4)]}{1+10K/[s(s+1)(s+4)]}=\frac{10}{s^3+5s^2+4s+10K}$$

Por lo tanto, el arreglo de Routh para el denominador es

s^3	1	4
s^2	5	$10K$
s^1	$4-2K$	
s^0	$10K$	

Para que la primera columna sólo tenga valores positivos se debe tener

$$4-2K>0$$

y

$$10K>0$$

Esto significa que K debe estar entre 0 y 2.

Estabilidad relativa

La construcción del arreglo de Routh y la aplicación del criterio de que la primera columna del arreglo sólo debe contener términos po-

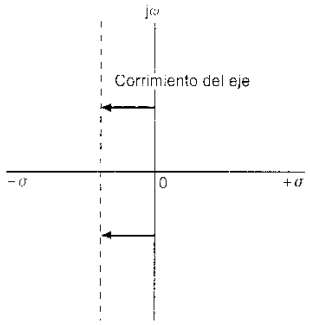


Figura 8.9 Corrimiento del eje

sitivos, permite decidir si el sistema tiene o no todas sus raíces en el semiplano izquierdo del plano s y, que de esta manera, el sistema sea o no estable. Sin embargo, a menudo esto es útil para saber qué tan cerca de la inestabilidad está un sistema estable. Para lograrlo es necesario saber qué tan cerca del eje imaginario están las raíces . Esto se puede hacer recorriendo el eje a la izquierda una cantidad definida (vea la figura 8.9) y encontrar si el corrimiento da o no por resultado un sistema inestable medido a partir del nuevo eje.

Recorrer el eje a $-\sigma$ significa que todos los valores de s del denominador de la función de transferencia se reemplacen por $(r-\sigma)$ y en la ecuación en r es donde ahora se aplica la prueba de estabilidad.

Ejemplo 11

¿Un sistema con función de transferencia con el siguiente denominador tendrá raíces cerca del eje situado en −1?

$$s^3 + 4s^2 + 8s + 4$$

Respuesta

Si el sistema es o no estable se puede probar mediante la construcción del arreglo de Routh. Esto es

s^3	1	8
s^2	4	4
s^1	7	
s^0	4	

y, de esta manera, el sistema es estable. Si ahora se recorre el eje a −1, entonces se reemplaza s por $(r-1)$.

$$(r-1)^3 + 4(r-1)^2 + 8(r-1) + 4$$

Esto es

$$(r^3 - 3r^2 + 3r - 1) + 4(r^2 - 2r + 1) + 8(r-1) + 4$$

Después de simplificar se obtiene

$$r^3 + r^2 + 3r - 1$$

El arreglo de Routh para esta ecuación es

r^3	1	3
r^2	1	−1
r^1	4	
r^0	−1	

El sistema es inestable. Dado que sólo hay un cambio de signo, sólo hay una raíz a la derecha de la línea en −1.

Problemas

1 Las salidas de varios sistemas cuando están sujetos a una entrada escalón son *a*) $\theta_0 = 3$, *b*) $\theta_0 = 3t$, *c*) $\theta_0 = 2 + 3t$. ¿Cuáles de estos sistemas son estables?

2 Las salidas de varios sistemas cuando están sujetos a una entrada impulso son *a*) $2t$, *b*) e^{-2t}, *c*) $t\,e^{-2t}$. ¿Cuáles sistemas son estables?

3 ¿Cuáles son los polos y ceros de los sistemas dados por las siguientes funciones de transferencia en lazo cerrado?

a) $\dfrac{2s-1}{s^2-5s+6}$

b) $\dfrac{4s-1}{s^2+2s}$

c) $\dfrac{(s+2)(s-3)}{(s+2)(s+3)(s-4)}$

d) $\dfrac{4}{s^2+2s+3}$

e) $\dfrac{s^2+s+1}{s(s-3)(s+5)}$

4 ¿Cuáles son las funciones de transferencia de los sistemas con los siguientes polos y ceros?

a) Polos en 0, −1, −2; sin ceros.
b) Polos en +1, −3; cero en 0.
c) Polos en $(-2 \pm j1)$; cero en −1.
d) Polos en 0, $(-3 \pm j2)$; ceros en −1, +2.

5 ¿Cuáles de los siguientes sistemas son estables, críticamente estables e inestables?

a) Polos en 0, −1; sin ceros.
b) Polos en 0, +1; cero en −1.
c) Polos en +1, −3, −4; cero en −1.
d) Polos en −2, −3; cero en 0.
e) Polos en $(-3 \pm j1)$; cero en 0.
f) Polos en $(2 \perp j3)$; cero en −1.
g) Polos en 0, $(-1 \pm j2)$; ceros en +1, −2.

6 Los siguientes polinomios son los denominadores de las funciones de transferencia de varios sistemas. Por inspección, ¿cuáles de éstos podrían ser estable, inestables y críticamente estables?

a) $s^2 + 2s$.
b) $s^3 - 2s^2 + s + 3$.
c) $s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 4s - 1$.
d) $s^5 + 2s^4 + 3s^3 + s^2 + 2s + 1$.

7 Usar el arreglo de Routh para determinar si los sistemas que tienen las funciones de transferencia con los siguientes polinomios son o no estables.

a) $s^3 + 4s^2 + 8s + 12$.
b) $s^4 + s^3 + s^2 + 2s + 3$.
c) $s^3 + 2s^2 + 2s + 6$.
d) $s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 32s + 16$.

8 El denominador de la función de transferencia de un sistema es

$s^3 + 2s^2 + 4s + K$

¿En qué intervalo de valores puede estar K si el sistema fuera estable?

9 ¿Un sistema con función de transferencia con el siguiente denominador tendrá raíces cerca del eje situado en -1?

$s^2 + 4s + 2$

10 Determinar el intervalo de valores de K para que el sistema que ilustra la figura 8.10 de por resultado la estabilidad, si se presentan perturbaciones.

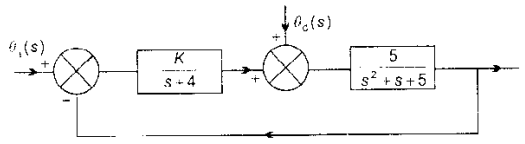


Figura 8.10 Problema 10

9 Análisis del lugar geométrico de las raíces

Introducción

Las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia de un sistema, denominadas polos, determinan la forma general de la respuesta transitoria de ese sistema. La figura 9.1 muestra, para un sistema con la función de transferencia

$$G(s) = \frac{K}{(s - p_1)(s + p_2)}$$

cómo al cambiar la posición de los polos, p_1 y p_2, en el plano s cambia la respuesta transitoria cuando el sistema está sujeto a un impulso. Este capítulo estudia la relación entre el comportamiento de los sistemas y las posiciones de sus raíces. La técnica que se utiliza para este análisis se denomina *método del lugar geométrico de las raíces*.

Lugares geométricos de las raíces de sistemas de primer orden

Considere el sistema de primer orden que se ilustra en la figura 9.2. La función de transferencia del sistema en lazo abierto, $G_c(s)$ es $K/(s + 1)$ y, puesto que la realimentación es unitaria, el sistema tiene una función de transferencia $G(s)$ de

$$G(s) = \frac{K/(s+1)}{1 + (K/(s+1))}$$

la cual se puede reescribir como

$$G(s) = \frac{K}{s + (1 + K)}$$

El sistema tiene un solo polo, en $-(1 + K)$. Cuando $K = 0$, entonces el polo está en -1 y a medida que se incrementa el valor de K, el valor del polo se hace más negativo, como se ilustra en la figura 9.3. La línea que muestra cómo cambia la posición del polo se aleja desde $K = 0$ a medida que K cambia, y se denomina *lugar geométrico de las raíces*.

Cuando $K = 0$ la función de transferencia del sistema se convierte en función de transferencia en lazo abierto, y el valor de la raíz para el sistema cuando $K = 0$ se denomina *polo en lazo abierto*.

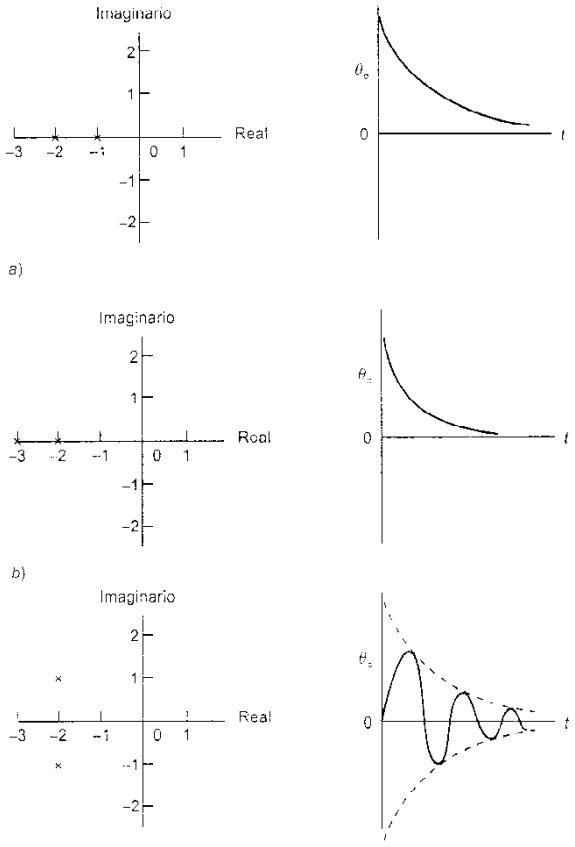


Figura 9.1 Posición de los polos y respuestas a un impulso

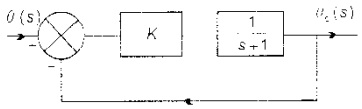


Figura 9.2 Un sistema de primer orden

Puesto que el valor de la raíz depende del valor de K, la respuesta del sistema también depende del valor de K. La figura 9.4 describe cómo la respuesta del sistema *a*) a un impulso y *b*) a un escalón, depende del valor de K.

Ejemplo 1

Para un sistema de primer orden con una función de transferencia en lazo abierto de $K/(s+2)$ y realimentación unitaria, *a*) esbozar la gráfica del lugar geométrico de las raíces y *b*) obtener la respuesta general del sistema a una entrada escalón unitario.

Respuesta

El sistema tiene una función de transferencia de

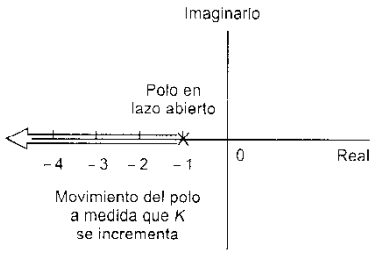


Figura 9.3 Lugar geométrico de las raíces para el sistema de la figura 9.2

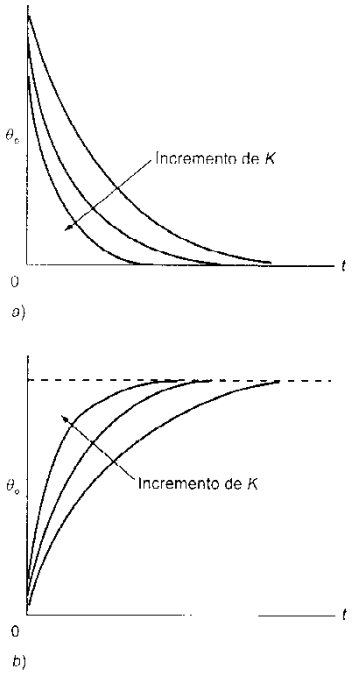


Figura 9.4 Respuesta del sistema de la figura 9.2 a: *a*) una entrada impulso, *b*) una entrada escalón

$$G(s) = \frac{K/(s+2)}{1+[K/(s+2)]}$$

$$G(s) = \frac{K}{s+2+K}$$

La ecuación característica es

$$s+2+K=0$$

De esta manera, se tiene el polo en lazo abierto cuando $K=0$ y, por lo tanto, está en $s=-2$. Cuando K no es cero entonces la ecuación característica se puede escribir como

$$s+(2-K)=0$$

lo cual indica un solo polo en $-(2+K)$. Por ello, a medida que K se incrementa desde 0, el polo se mueve a valores más negativos a partir de -2. La figura 9.5 ilustra la gráfica del lugar geométrico de las raíces.

Puesto que $G(s)=\theta_o(s)/\theta_i(s)$ y por lo tanto, para una entrada escalón $\theta_i(s)$ de $1/s$ la salida $\theta_o(s)$ está dada por

$$\theta_o(s) = \frac{K}{s[s+(2+K)]}$$

Esta transformada es de la forma general $1/[s(s+a)]$, cuya transformada inversa es $(1/a)(1-e^{-at})$. Por lo tanto

$$\theta_o = \frac{K}{2+K}[1-\exp-(2+K)t]$$

donde K es siempre más negativa que -2.

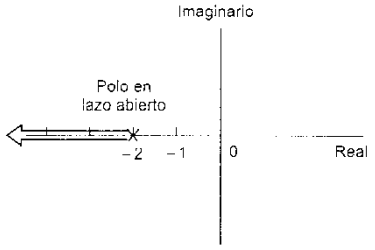


Figura 9.5 Ejemplo 1

Lugares geométricos de las raíces de sistemas de segundo orden

La figura 9.6 muestra un sistema de segundo orden. La función de transferencia en lazo abierto $G_o(s)$ del sistema es $K/[s(s+1)]$ y, puesto que la realimentación es unitaria, el sistema tiene una función de transferencia de

$$G(s) = \frac{K/[s(s+1)]}{1+K/[s(s+1)]}$$

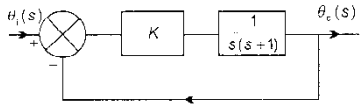


Figura 9.6 Un sistema de segundo orden

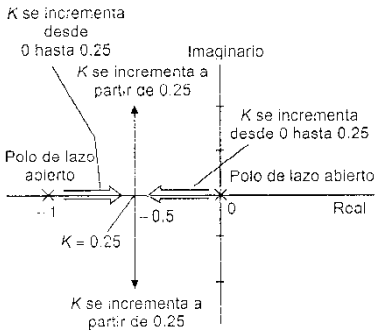


Figura 9.7 Lugares geométricos de las raíces para el sistema de la figura 9.6

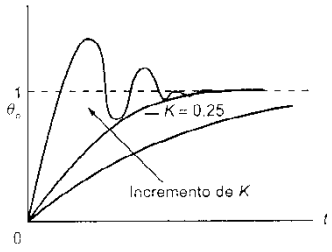


Figura 9.8 Respuesta del sistema de la figura 9.6 a una entrada escalón unitario

la cual se puede escribir como

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + s + K}$$

Las raíces de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c$ están dadas por

$$\text{Raíces} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y así, las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia son

$$p = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4K}}{2}$$

$$p = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - 4K}$$

Cuando $K = 0$, entonces $p = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$, es decir, las raíces en lazo abierto están en 0 y −1. Cuando $K = \frac{1}{4}$, entonces $p = -\frac{1}{2}$, es decir, ambas raíces están en $-\frac{1}{2}$. Para los valores de K entre 0 y $\frac{1}{4}$ la raíz en 0 se hace más negativa y se mueve hacia $-\frac{1}{2}$, mientras que la raíz en −1 se hace menos negativa y se mueve hacia $-\frac{1}{2}$, como señala la figura 9.7. Para $K = 1$, las raíces están dadas por $p = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}$ y, de este modo, están en $-\frac{1}{2} + j\sqrt{3}$ y $-\frac{1}{2} - j\sqrt{3}$. Para todos los valores de K mayores de 0.25 se presenta un par de raíces complejas, siendo constante la componente real de valor $-\frac{1}{2}$ y la parte imaginaria tiene un valor que se incrementa a medida que K aumenta.

Puesto que los valores de las raíces dependen del valor de K, la respuesta del sistema a entradas externas también depende del valor de K. La figura 9.8 muestra la respuesta del sistema con diferentes valores de K a una entrada escalón unitario. Para valores de K entre 0 y 0.25 se tiene la respuesta sobreamortiguada de un sistema de segundo orden. Para $K = 0.25$ el sistema es críticamente amortiguado. Para K mayor que 0.25 el sistema es subamortiguado y presenta oscilaciones.

El polinomio del denominador de la función de transferencia, es decir, $(s^2 + s + K)$, se puede escribir en la forma $(s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2)$. Vea los capítulos 2 y 3, donde ω_n es la frecuencia natural de oscilación y ζ es el factor de amortiguamiento relativo. De esta manera, para este sistema $\omega_n^2 = K$ y es $2\omega_n\zeta = 1$ y así $\omega_n = \sqrt{K}$ y $\omega_n\zeta = \frac{1}{2}$, es decir, los valores de los polos en el amortiguamiento crítico, y $\zeta = 1/(2\sqrt{K})$. Así a medida que K se incrementa a partir de 0.25, también se incrementa la frecuencia natural y decrece el factor de amortiguamiento relativo.

Ejemplo 2

Para el sistema de la figura 9.9 esbozar el diagrama de los lugares geométricos de las raíces y especificar los valores de la ganancia K en los que el sistema empieza a oscilar.

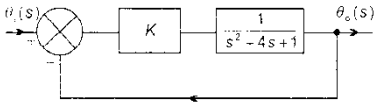


Figura 9.9 Ejemplo 2

Respuesta

La función de transferencia en lazo abierto es $K/(s^2+4s+1)$ y con realimentación unitaria la función de transferencia del sistema es

$$G(s) = \frac{K/(s^2+4s+1)}{1+K/(s^2+4s+1)} = \frac{K}{s^2+4s+(1+K)}$$

Las raíces de una ecuación de la forma ax^2+bx+c están dadas por

$$\text{Raíces} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

y, así, las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia son

$$p = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4(1+K)}}{2}$$

$$p = -2 \pm \sqrt{(3-K)}$$

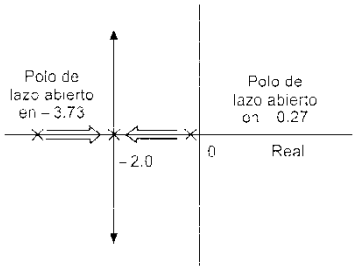


Figura 9.10 Ejemplo 2

Los polos en lazo abierto se tienen cuando $K=0$ y, por lo tanto, están en $p=-0.27$ y $p=-3.73$. Cuando $K=3$ ambas raíces tienen el mismo valor $p=-2$. Cuando K es mayor que 3 las raíces son complejas. De este modo, la gráfica del lugar geométrico de las raíces es como ilustra la figura 9.10. El valor de K, en el cual el sistema está críticamente amortiguado, es 3; para valores de K mayores a éste las raíces son complejas y así se tienen oscilaciones.

Lugares geométricos de las raíces de sistemas en lazo cerrado

Considere el sistema general en lazo cerrado que muestra la figura 9.11. La función de transferencia en lazo abierto es $G_o(s)$ y, así, con realimentación unitaria, la función de transferencia $G(s)$ para el sistema es

$$G(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} \qquad [1]$$

Figura 9.11 Sistema en lazo cerrado

Los polos serán los valores de s para los cuales el polinomio del denominador es cero, es decir,

$$1+G_o(s)=0$$

y, de este modo

$$G_o(s) = -1 \qquad [2]$$

$G_o(s)$ se puede obtener a partir del agrupamiento de varios elementos, cada uno de los cuales tiene su propia función de transferencia. En general es posible el escribir

$$G_o(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)} \qquad [3]$$

donde K es una constante; $z_1, z_2, \ldots z_m$, los ceros, y $p_1, p_2, \ldots p_n$, los polos. Si los valores de s en la ecuación anterior van a ser los valores de los polos y, de esta forma, estar sobre el lugar geométrico de las raíces, entonces también se debe satisfacer la ecuación [2]. De este modo, para los puntos sobre el lugar geométrico de las raíces

$$\frac{K(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)} = -1 \qquad [4]$$

Debido a que s es una variable compleja la ecuación anterior se puede escribir en forma polar (vea la siguiente nota para un breve estudio de estas formas). Puesto que la magnitud del producto de dos números complejos es el producto de sus magnitudes y el cociente es el cociente de sus magnitudes, la ecuación [4] en forma polar para las magnitudes es

$$\frac{K|s-z_1||s-z_2|\ldots|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|\ldots|s-p_n|} = 1 \qquad [5]$$

Dado a que el argumento del producto de dos números complejos es la suma de sus argumentos y el cociente su diferencia, la ecuación [4] en forma polar da para los argumentos

$$[\angle(s-z_1)+\angle(s-z_2)+\ldots+\angle(s-z_m)]$$
$$-[\angle(s-p_1)+\angle(s-p_2)+\ldots+\angle(s-p_n)]$$
$$= \pm \text{ múltiplo impar de } \pi \qquad [6]$$

La ecuación [6] se puede utilizar para determinar si un punto en el plano s está sobre un lugar geométrico de las raíces. Si el punto está sobre el lugar geométrico de las raíces se cumplirá la ecuación [6], si el punto no está sobre el lugar geométrico de las raíces, entonces ésta no se cumplirá. Mediante prueba y error se puede establecer el lugar geométrico de las raíces. La ecuación [5] dara el valor de K en los puntos a lo largo del lugar geométrico de las raíces.

Para ilustrar lo anterior considere un sistema con función de transferencia en lazo abierto de

$$G_o(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)}$$

y realimentación unitaria. La función de transferencia del sistema será

$$G(s) = \frac{K(s+1)/[s(s+2)]}{1+K(s+1)/[s(s+2)]}$$

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)+K(s+1)}$$

El sistema tiene los polos en lazo abierto, es decir, cuando $K = 0$, en 0 y -2 y un cero en -1. Considere algún punto sobre el plano s, sea s_1 (figura 9.12). Se dibujan líneas para conectar el punto con los polos y el cero. Para que s_1 esté sobre el lugar geométrico de las raíces se debe tener que, al aplicar la ecuación [6]

$$\beta - (\alpha_1 - \alpha_2) = \pm \text{ múltiplo impar de } \pi$$

Aplicando la ecuación [5]

$$\frac{Kb}{ac} = 1$$

y así, $K = ac/b$.

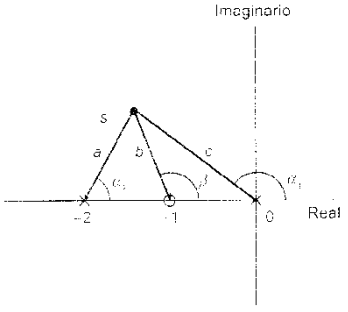


Figura 9.12 $G_o(s) = K(s-1)/s(s+2)$

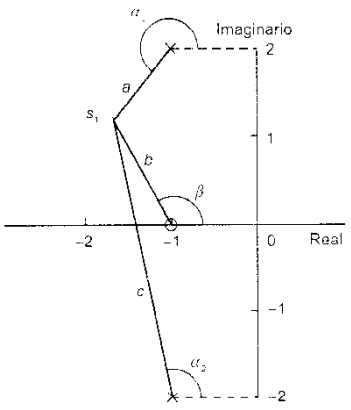


Figura 9.13
$G_o(s) = K(s+1)/(s^2+2s+5)$

Como ejemplo adicional, considere un sistema con

$$G_o(s) = \frac{K(s+1)}{s^2+2s+5}$$

y realimentación unitaria. La función de transferencia del sistema será

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2+2s+5+K(s+1)}$$

Ésta tiene un cero en -1 y raíces en lazo abierto, es decir, cuando $K = 0$, de $-1 \pm j2$ y, por lo tanto, el plano s es como describe la figura 9.13. Para que el punto s_1 esté sobre el lugar geométrico de las raíces, se debe tener, al aplicar la ecuación [6]

$$\beta - (\alpha_1 + \alpha_2) = \pm \text{ múltiplo impar de } \pi$$

Según la ecuación [5]

$$\frac{Kb}{ac} = 1$$

y así, $K = ac/b$.

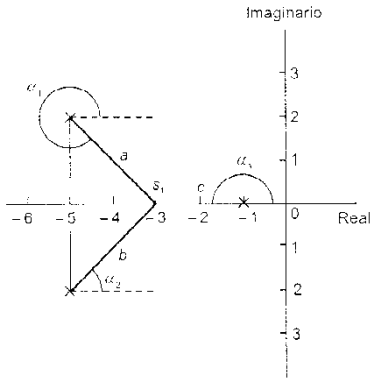


Figura 9.14 Ejemplo 3

Ejemplo 3

Muestre que el punto s_1 de la figura 9.14 está sobre el lugar geométrico de las raíces y determinar el valor de K para el punto.

Respuesta

El sistema tiene tres raíces y ningún cero. De esta manera, al aplicar la ecuación [6]

$$0 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \pm \text{ múltiplo impar de } \pi$$

Pero $\alpha_3 = 180°$ o π y $(\alpha_1 + \alpha_2) = 360°$ o 2π. Por lo tanto, se tiene

$$0 - (\pi + 2\pi)$$

para la suma y, así, es un múltiplo impar de π.

El valor de K para el punto está dado por la ecuación [5] como

$$\frac{K}{abc} = 1$$

Puesto que $a = b = \sqrt{8}$ y $c = 2$, entonces $K = 2\sqrt{8}\sqrt{8} = 16$.

Representación polar de números complejos

La figura 9.15 representa un número complejo, $(x + jy)$, en una gráfica donde el eje y es la parte imaginaria del número y el eje x la parte real. A partir de la trigonometría

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$

De esta manera

$$x + jy = r(\cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta)$$

Esto en general se abrevia como

$$x + jy = r\angle\theta$$

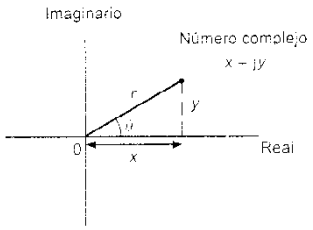


Figura 9.15 Figura polar de un número complejo

r se denomina *magnitud* o *módulo* del número complejo y se escribe como $|x + jy|$. θ se denomina *argumento* del número complejo.

Entonces el producto de dos números complejos se puede escribir como

$$\begin{aligned} & r_1(\cos\theta_1 + j\operatorname{sen}\theta_1)\, r_2(\cos\theta_2 + j\operatorname{sen}\theta_2) \\ &\quad = r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) \\ &\qquad + j(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)] \\ &\quad = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

y, de este modo, el producto tiene una magnitud que es el producto de las magnitudes y un argumento que es la suma de los argumentos.

Dividir un número complejo entre otro da como resultado

$$\begin{aligned} & \frac{r_1(\cos\theta_1 + j\operatorname{sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + j\operatorname{sen}\theta_2)} \\ &\quad = \frac{r_1(\cos\theta_1 + j\operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 - j\operatorname{sen}\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + j\operatorname{sen}\theta_2)(\cos\theta_2 - j\operatorname{sen}\theta_2)} \\ &\quad = \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{j(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2}\right] \\ &\quad = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \end{aligned}$$

y, de esta manera, el cociente tiene una magnitud que es el cociente de las magnitudes y un argumento que es la diferencia de los argumentos.

Construcción de lugares geométricos de las raíces

La técnica expuesta al inicio de este capítulo para graficar el lugar geométrico de las raíces se puede resumir como:

1. Mediante prueba y error encontrar en el plano s los puntos con ángulos entre el eje real y las líneas que unen dichos puntos con los ceros y los polos que satisfagan la ecuación [6], la ecuación de argumento.
2. Determinar el valor de K en los puntos sobre el lugar geométrico de las raíces con base en la ecuación [7], la ecuación de magnitud.

Esto podría parecer un procedimiento erróneo o de los llamados a palos de ciego; sin embargo, existen varias reglas que ayudan a elegir en forma apropiada los puntos sobre el lugar geométrico de las raíces.

1. El número de lugares geométricos es igual al grado n de la ecuación característica de la función de transferencia en lazo abierto, es decir, el polinomio del denominador. Cada raíz traza un lugar geométrico a medida que K varía desde 0 en un polo en lazo abierto, hasta infinito en un cero en lazo abierto. El término

rama de lugar geométrico de las raíces se usa con frecuencia para cada lugar geométrico de las raíces. Estas ramas son curvas continuas que inician en cada uno de los n polos en lazo abierto, donde $K = 0$, y se aproxima a infinito en los m ceros en lazo abierto. Las ramas del lugar geométrico para los polos en exceso (polos que no tienen correspondencia con ceros finitos), es decir, donde $n > m$, se extienden a infinito. Para ceros en exceso, es decir, $m > n$, las ramas se extienden desde infinito a los polos en lazo abierto. De este modo, para un sistema que tiene una ecuación característica en lazo abierto de $s^3 + 2s^2 + 3s + K = 0$ habrá tres ramas del lugar geométrico de las raíces.

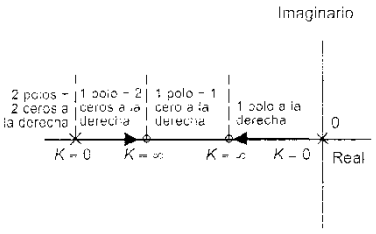


Figura 9.16 Lugares geométricos de las raíces sobre el eje real

2 Los lugares geométricos de las raíces de un sistema con una ecuación característica real son simétricos respecto al eje real. Esto se debe a que las raíces complejas se presentan en pares de la forma $\sigma \pm j\omega$.

3 Los lugares geométricos de las raíces comienzan en los n polos del sistema donde $K = 0$.

4 Los lugares geométricos de las raíces finalizan en los m ceros del sistema, donde $K = \infty$. Si hay más polos que ceros, que es el caso más común, entonces m lugares geométricos terminan en los m ceros finitos y los $(n - m)$ lugares geométricos restantes terminan en infinito.

5 Las porciones del eje real son secciones de los lugares geométricos de las raíces si el número de polos y ceros a la derecha de dicha porción es impar, como lo ilustra la figura 9.16.

6 Aquellos lugares geométricos que terminan en infinito tienden hacia las asíntotas que forman ángulos respecto al eje real positivo de

$$\frac{\pi}{n-m}, \frac{3\pi}{n-m}, \frac{5\pi}{n-m}, \cdots \frac{[2(n-m)-1]\pi}{n-m}$$

La figura 9.17 muestra ejemplos de dichos lugares geométricos para un sistema cuando $n = 3$ y $m = 0$. Los ángulos de las asíntotas son $\pi/3$ o 60°, π o 180° y $5\pi/3$ o 360°.

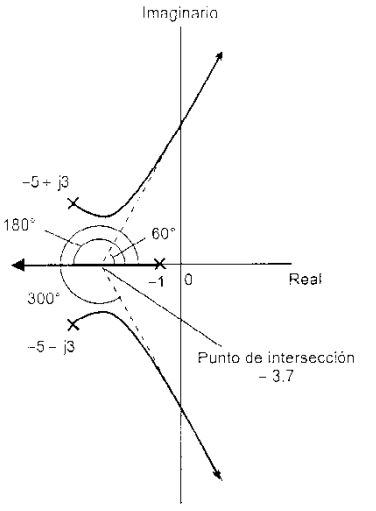


Figura 9.17 Asíntotas con $n = 3$ y $m = 0$

7 Las asíntotas intersectan sobre el eje real en un punto, algunas veces llamado *centro de gravedad* o *centroide* de las asíntotas, dado por

$$\frac{(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) - (z_1 + z_2 + \ldots + z_m)}{n - m}$$

De este modo, para el ejemplo de la figura 9.17 donde los polos están en -1 y $-5 \pm j3$ y no hay ceros, entonces el punto de intersección es

$$\frac{-1 - 5 + j3 - 5 \quad j3}{3} = -3.7$$

8 La intersección de los lugares geométricos de las raíces con el eje imaginario se puede encontrar calculando aquellos valores de K que den como resultado la existencia de las raíces imagina-

rias en la ecuación característica, es decir, $s = \sigma + j\omega$ con $\sigma = 0$. Por ejemplo, con una ecuación característica $s^3 + 2s^2 + 3s + K$, entonces haciendo $s = j\omega$ resulta $-j\omega^3 - 2\omega^2 + 3j\omega + K = 0$ y así, al igualar las partes imaginarias se obtiene $-\omega^3 + 3\omega = 0$ y $\omega = \sqrt{3}$ e igualando las partes reales da como resultado $2\omega^2 + K = 0$ y así, $K = 6$.

Una alternativa para determinar esta intersección es el usar el arreglo de Routh y encontrar el valor límite de K que preserva la estabilidad, siendo éste el valor de K, donde los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje imaginario.

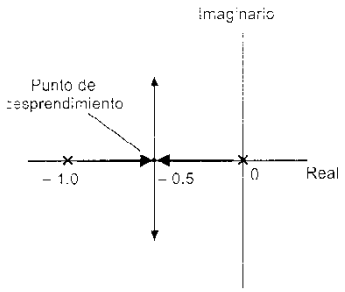


Figura 9.18 Punto de desprendimiento de $G_0(s) = K/s(\sigma - 1)$

9 El término *punto de desprendimiento* o *ruptura* se usa cuando dos o más lugares geométricos se encuentran en un punto y en forma subsecuente se "separan" de ese punto siguiendo trayectorias separadas. La figura 9.18 muestra dicho punto de desprendimiento. Los puntos de desprendimiento se presentan en aquellos puntos para los cuales, la ecuación característica $dK/ds = 0$. Sin embargo, se debe observar que no todas las raíces de la ecuación $dK/ds = 0$ corresponden a los puntos de desprendimiento, solamente aquéllas para las cuales la ecuación [5], es decir la ecuación de argumento, se satisface. Para el sistema dado en la figura 9.18

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + s + K}$$

La ecuación característica es

$$s^2 + s + K = 0$$

Por lo tanto

$$K = -s^2 - s$$

$$\frac{dK}{ds} = -2s - 1$$

Cuando $dK/ds = 0$, entonces

$$-2s - 1 = 0$$

y así, el punto de desprendimiento está en $s = -\frac{1}{2}$.

10 El ángulo de partida de los lugares geométricos en $K = 0$ de un polo complejo y el ángulo de llegada de los lugares geométricos de las raíces en $K = \infty$ a un cero complejo se puede determinar con la ecuación de argumento [6] y haciendo que s sea un punto sobre el lugar geométrico de las raíces muy cercano al polo o cero considerado.

La figura 9.19 ilustra esta idea cuando se aplica para determinar el ángulo de partida de un polo complejo $(-2 + j2)$. El sistema tiene polos en 0 y $-2 \pm j2$ sin ceros, y así, se debe tener

$$-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \pm \text{ múltiplo impar de } \pi$$

Debido a que el punto está muy cercano al polo, entonces $\alpha_1 = 180° - \tan^{-1}(2/2)$ y, de este modo, es 135°. El ángulo α_3 es 90°. Por lo tanto, se tiene

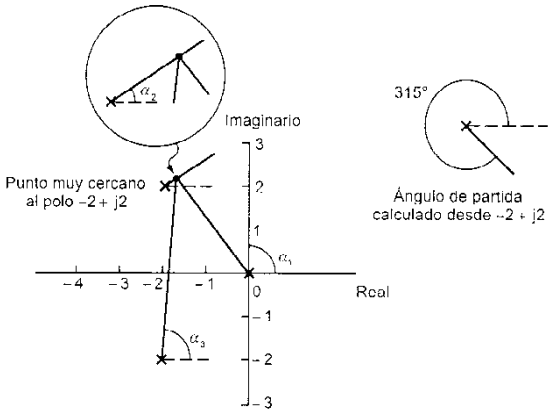


Figura 9.19 Ángulo de partida

$$-(135° + \alpha_2 + 90°) = -\text{múltiplo impar de } \pi = -540°$$

Por lo tanto $\alpha_2 = 315°$.

Una secuencia útil que se puede seguir, con la ayuda de las reglas anteriores, para construir lugares geométricos de las raíces se puede resumir como:

1 Obtener la ecuación característica de la función de transferencia en lazo abierto, $G_0(s)$, para el sistema.
2 Determinar las posiciones de los polos y los ceros.
3 Determinar, con base en la regla 1, el número de lugares geométricos.
4 Graficar los lugares geométricos sobre el eje real con la regla 5.
5 Determinar los ángulos de las asíntotas a partir de la regla 6.
6 Obtener la intersección de las asíntotas con el eje real con base en la regla 7.
7 Determinar la intersección de las asíntotas con el eje imaginario con la regla 8.
8 Determinar los puntos de desprendimiento usando la regla 9.
9 Obtener los ángulos de partida de polos complejos y los ángulos de llegada a ceros complejos a partir de la regla 10.
10 Esbozar los lugares geométricos de las raíces teniendo en cuenta las reglas 2, 3 y 4.

La figura 9.20 ilustra algunos ejemplos de gráficas de lugar geométrico de las raíces para sistemas que tienen diferentes formas de funciones de transferencia en lazo abierto.

Ejemplo 4

Esbozar los lugares geométricos de las raíces para un sistema con una función de transferencia en lazo abierto de

$$\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Respuesta

Siguiendo los pasos antes expuestos:

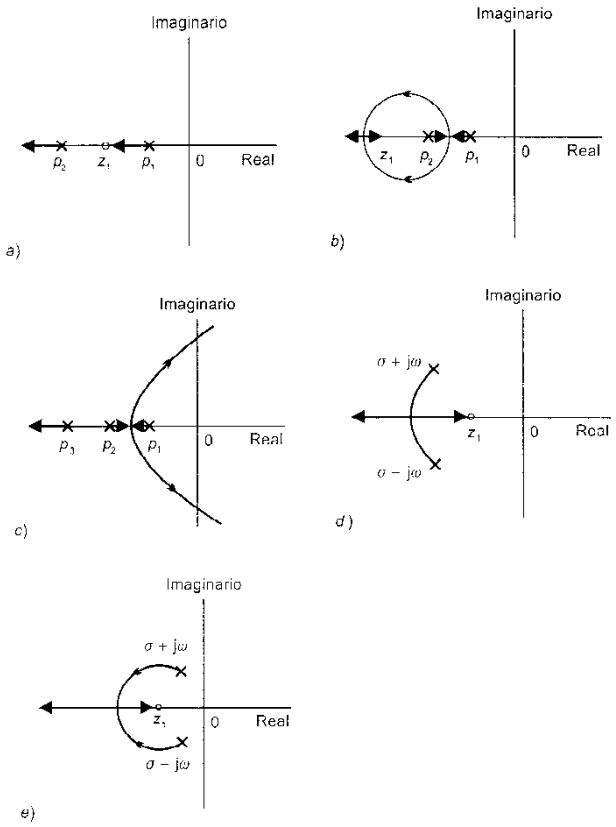


Figura 9.20 Gráficas de lugares geométricos de las raíces de:
a) $G_o(s) = K(s + z_1)/(s + p_1)(s + p_2)$, cuando $p_2 > z_1 > p_1$;
b) $G_o(s) = K(s + z_1)/(s + p_1)(s + p_2)$, cuando $z_1 > p_2 > p_1$;
c) $G_o(s) = K/(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)$;
d) $G_o(s) = K(s + z_1)/(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)$, cuando $\sigma > z_1$;
e) $G_o(s) = K(s + z_1)/(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)$, cuando $z_1 > \sigma_1$;
f) $G_o(s) = K/(s + p_1)(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)$, cuando $p_1 > \sigma$;
g) $G_o(s) = K/(s - p_1)(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)$, cuando $\sigma > p_1$;
h) $G_o(s) = K(s + z_1)/(s + p_1)(s + p_2)(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)$, cuando $p_2 > p_1 > \sigma$;
i) $G_o(s) = K(s + z_1)/s(s + p_1)(s + p_2)$, cuando $p_2 > z_1 > p_1$;
j) $G_o(s) = K/s^2(s + p_1)$;
k) $G_o(s) = K(s + z_1)/s^2(s + p_1)$, cuando $p_1 > z_1$;
l) $G_o(s) = K(s + z_1)/s^2(s + p_1)(s + p_2)$, cuando $p_2 > p_1 > z_1$

(La figura continúa en la página 212)

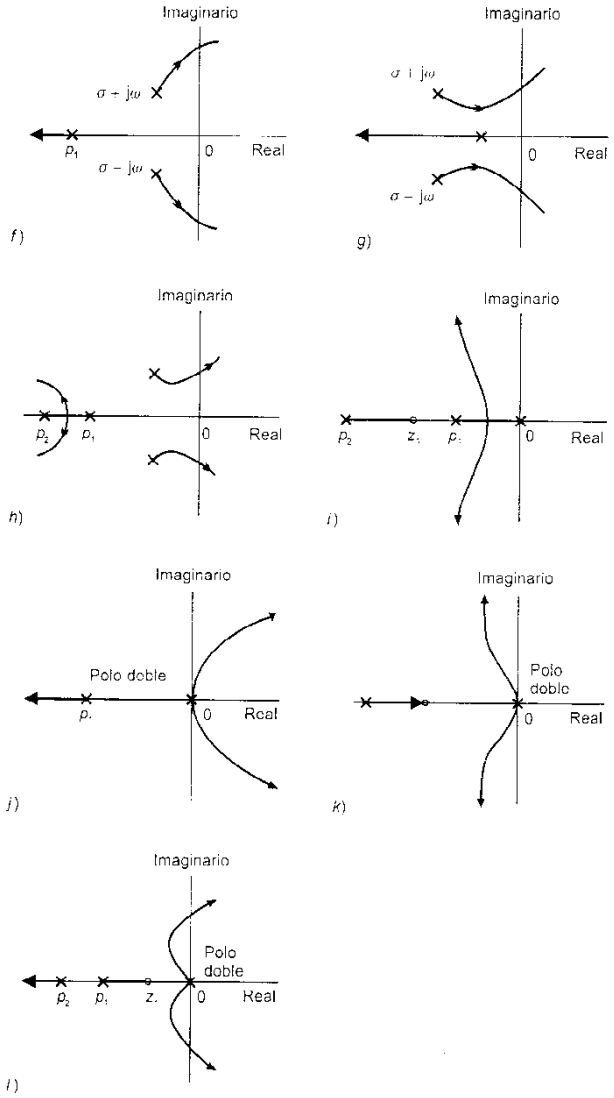


Figura 9.20 (continuación)

1 El sistema tiene realimentación unitaria y, de este modo, la función de transferencia del sistema estará dada por la ecuación [1] como

$$G(s) = \frac{K/(s+1)(s+2)(s+3)}{1+K/(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)+K}$$

La ecuación característica es, entonces

$$(s+1)(s+2)(s+3)+K=0$$

2 Cuando $K=0$ la ecuación característica se convierte en

$$(s+1)(s+2)(s+3)=0$$

y los polos en lazo abierto están en -1, -2 y -3. No hay ceros.

3 La ecuación es de tercer grado y, por lo tanto, se tendrán tres lugares geométricos de las raíces.

4 Las porciones del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real estarán entre -1 y -2 y desde -3 hasta menos infinito.

5 Los ángulos de las asíntotas serán $\pi/3$ o 60°, $3\pi/3$ o 180° y $5\pi/3$ o 300°.

6 El punto de intersección de las asíntotas con el eje real es

$$\frac{-1-2-3}{3}=-2$$

7 Las intersecciones con el eje imaginario se pueden determinar haciendo $s=j\omega$ en la ecuación característica, con lo que se obtiene

$$(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)+K=0$$

$$j^3\omega^3+j^2\omega^2 6+j\omega 11+6+K=0$$

$$-j\omega^3-\omega^2 6+j\omega 11+6+K=0$$

Al igualar las partes imaginarias se obtiene $-\omega^3+11\omega=0$ y, de esta manera, $\omega=\pm\sqrt{11}$. Al igualar las partes reales da por resultado $-6\omega^2+6+K=0$ y así $K=60$.

8 Para determinar el punto de desprendimiento; la ecuación característica es

$$(s+1)(s+2)(s+3)+K=0$$

$$K=-(s^3+6s^2+11s+6)$$

$$\frac{dK}{ds}=-3s^2 \quad 12s \quad 11$$

Al igualar la ecuación a cero se tiene que

$$3s^2+12s+11=0$$

y, de esta manera, las raíces son

$$\frac{-12\pm\sqrt{144-132}}{6}=-2\pm 0.58$$

Sólo es factible el punto de desprendimiento $-2+0.58$.

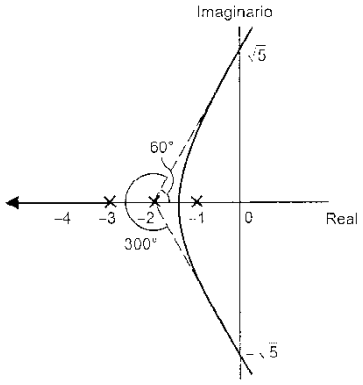


Figura 9.21 Ejemplo 4

9 No hay polos o ceros complejos.

10 La figura 9.21 muestra la gráfica completa de los lugares geométricos de las raíces.

Ejemplo 5

Esbozar los lugares geométricos de las raíces para un sistema con una función de transferencia en lazo abierto de

$$\frac{K(s+1)}{(s+2+\mathrm{j}3)(s+2-\mathrm{j}3)}$$

Respuesta

Siguiendo los pasos antes expuestos:

1 El sistema tiene realimentación unitaria y, por lo tanto, la función de transferencia del sistema es

$$G(s)=\frac{K(s+1)/(s+2+\mathrm{j}3)(s+2-\mathrm{j}3)}{1+K(s+1)/(s+2+\mathrm{j}3)(s+2-\mathrm{j}3)}$$

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{(s+2+\mathrm{j}3)(s+2+\mathrm{j}3)+K(s+1)}$$

Así, la ecuación característica es

$$(s+2+\mathrm{j}3)(s+2-\mathrm{j}3)+K(s+1)=0$$

2 Cuando $K=0$ la ecuación característica se convierte en

$$(s+2+\mathrm{j}3)(s+2-\mathrm{j}3)=0$$

Los polos en lazo abierto son, de este modo $2\pm\mathrm{j}3$. Como la función de transferencia en lazo abierto incluye $(s+1)$ en el numerador hay un cero en -1.

3 La ecuación es de segundo grado y tiene dos lugares geométricos de las raíces.

4 Las porciones del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real son desde -1 hasta infinito.

5 Los ángulos de las asíntotas serán, puesto que $n-m=1$, $\pi/1$ o $180°$ y estas se sitúan sobre el eje real.

6 Puesto que las asíntotas están sobre el eje real el punto de intersección no tiene interpretación.

7 Cualquier punto de intersección de los lugares geométricos con el eje imaginario se puede determinar haciendo $s=\mathrm{j}\omega$ en la ecuación característica. Esto da como resultado

$$(\mathrm{j}\omega+2+\mathrm{j}3)(\mathrm{j}\omega+2-\mathrm{j}3)-K(\mathrm{j}\omega-1)=0$$

$$-\omega^2+\mathrm{j}(4-K)\omega+13-K=0$$

Por lo tanto, al igualar las partes imaginarias se obtiene $K=-4$ y al igualar las partes reales se tiene $\omega^2=13-K$ y, así, $\omega=\pm4.1$. Cuando K tiene valores negativos los lugares geométricos resultantes se denominan lugares geométricos complementarios. En este libro el estudio se restringe a los lugares geométricos que se producen cuando K es positiva y, de este modo, los valores negativos de K indican que los lugares geométricos no cruzan el eje imaginario.

8 El punto de desprendimiento se determina a partir de la ecuación característica, la cual es

$$(s+2+\mathrm{j}3)(s+2-\mathrm{j}3)+K(s-1)=0$$

Ésta se puede simplificar a

$$s^2+4s+9+K(s-1)=0$$

$$K=\frac{s^2+4s+9}{1-s}$$

Para diferenciar un cociente se tiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)-u(\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)}{v^2}$$

entonces

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s}=\frac{(1-s)(2s+4)-(s^2+4s+9)(-1)}{(1-s)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s}=\frac{s^2+2s+13}{s^2-2s+1}$$

Al igualar esta ecuación a cero, significa que se tiene

$$-s^2+2s+13=0$$

Las raíces de esta ecuación son

$$\frac{-2\pm\sqrt{4+52}}{-2}=1\pm 3.7$$

Sólo el valor de −2.7 es factible. De este modo hay un punto de desprendimiento en −2.7.

9 Se tiene un par de polos complejos y no hay ceros complejos. Los ángulos de partida del lugar geométrico en $K=0$ de un polo complejo se determinan al usar la ecuación de argumento [6] y haciendo que s sea un punto sobre el lugar geométrico de las raíces muy cercano al polo $-2+\mathrm{j}3$. Puesto que hay un ángulo β, al cero que es 90° más $\tan^{-1}(2/3)$ o 123.7°, un ángulo α al otro polo de 90° y un ángulo al polo $-2+\mathrm{j}3$ de α_1, entonces

$$123.7°-(\alpha_1+90°)=\pm\text{múltiplo impar de}\,180°$$

$$33.7°\quad \alpha_1=\pm 180°$$

Por lo tanto, $\alpha_1=213.7°$ o 146.3°.

10 La figura 9.22 ilustra el diagrama completo del lugar geométrico de las raíces.

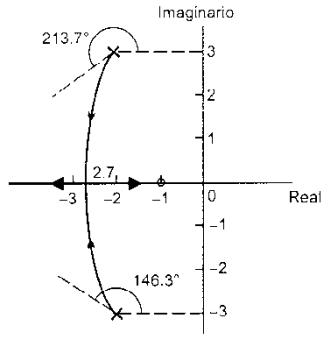


Figura 9.22 Ejemplo 5

Interpretación de los diagramas del lugar geométrico de las raíces

El diagrama del lugar geométrico de las raíces muestra el efecto que la variación de la ganancia tiene sobre las raíces de la ecuación característica en lazo cerrado y, por lo tanto, el comportamiento dinámico del sistema. Esto permite observar el efecto de modificar o adicionar polos y ceros al sistema que se va a estudiar. Los polos en lazo abierto de esos diagramas se puede considerar que actúan como las

"fuentes" de los lugares geométricos y los ceros como "pozos" con K incrementándose desde un polo en lazo abierto hasta infinito en un cero.

La función de transferencia en lazo cerrado de un sistema de segundo orden se puede representar mediante

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad [7]$$

donde ω_n es la frecuencia natural angular y ζ el factor de amortiguamiento relativo. Si el factor de amortiguamiento relativo está entre 0 y 1, entonces los polos son complejos, y el sistema produce una respuesta oscilatoria. Para esta condición se puede escribir

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)$$
$$= s^2 + 2\sigma s + \sigma^2 - \omega^2$$

Así

$$2\zeta\omega_n = 2\sigma$$

y, por lo tanto

$$\zeta = \frac{\sigma}{\omega_n} \qquad [8]$$

y

$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega^2 \qquad [9]$$

La ecuación [9] muestra que ω_n es la longitud de la línea que une el origen del plano s y el polo en lazo cerrado (véase la figura 9.23), puesto que para un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (teorema de Pitágoras). Debido a que σ/ζ es, para el mismo triángulo, el coseno del ángulo ϕ, entonces la ecuación [8] indica que

$$\zeta = \cos\phi \qquad [10]$$

De este modo, si la frecuencia angular de oscilación de un sistema se va a incrementar, la longitud de la línea que une al polo en lazo cerrado y el origen también se debe incrementar (figura 9.24). Si el factor de amortiguamiento relativo se incrementa, entonces el ángulo ϕ entre esta línea y el eje real debe decrecer debido a que esto incrementa el $\cos\phi$ (figura 9.24).

Como un ejemplo de la aplicación de los conceptos anteriores a un sistema, considere el diagrama del lugar geométrico de las raíces de la figura 9.25. Para dicho sistema el valor mínimo de la frecuencia natural angular será cuando $K = 0$, debido a que esto da la longitud más corta de la línea del polo al origen. Éste es también el valor mínimo del $\cos\phi$ y, de esta manera, el valor mínimo del factor de amortiguamiento relativo. A medida que K se incrementa, también ω_n y ζ se incrementan hasta que en el punto de desprendimiento $\zeta = 1$ y el amortiguamiento es crítico. Un incremento adicional en K dará como resultado que sólo se tengan raíces reales y, por lo tanto no haya oscilación.

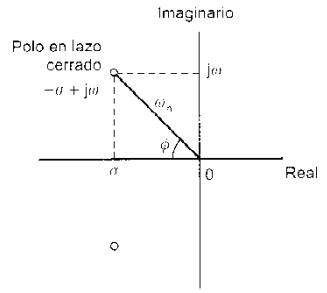


Figura 9.23 Polos complejos

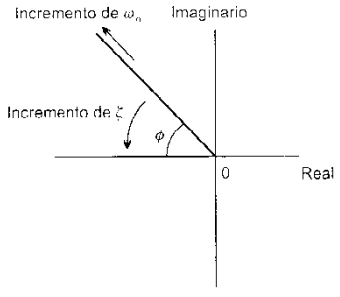


Figura 9.24 Frecuencia angular y factor de amortiguamiento relativo

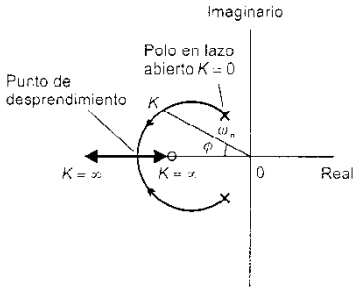


Figura 9.25 Efecto de cambiar K en ω_n y ζ

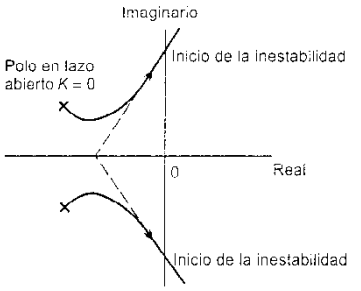


Figura 9.26 Inicio de la inestabilidad

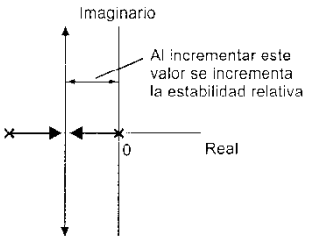


Figura 9.27 Estabilidad relativa

Al cambiar la frecuencia natural angular y/o el factor de amortiguamiento relativo se producirán cambios en los parámetros de desempeño del sistema como el tiempo de levantamiento, sobrepaso en porcentaje y el tiempo de asentamiento (vea el capítulo 3). De esta manera, por ejemplo, el tiempo de asentamiento de 2% está dado por la ecuación [36], del capítulo 3

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Debido a que la ecuación [8] indica que $\zeta = \sigma/\omega_n$, entonces

$$t_s = \frac{4}{\sigma} \qquad [11]$$

El tiempo de levantamiento t_r, de un sistema está dado por la ecuación [29], capítulo 2

$$t_r = \frac{\pi}{2\omega} \qquad [12]$$

De este modo, al incrementar ω el tiempo de levantamiento decrece.

El diagrama del lugar geométrico de las raíces también se puede usar para estudiar el efecto de cambiar la ganancia en la estabilidad del sistema. Así, para el diagrama del lugar geométrico de las raíces que describe la figura 9.26 la inestabilidad se empieza a presentar cuando el valor de K es tal que el diagrama del lugar geométrico de las raíces alcanza al eje imaginario. La inestabilidad relativa de un sistema se puede juzgar por la proximidad de sus lugares geométricos de las raíces al eje imaginario, un sistema con lugares geométricos de las raíces más alejados del correspondiente a otro sistema es relativamente más estable (figura 9.27).

La introducción de un cero en el semiplano izquierdo del plano s mejora la estabilidad relativa de un sistema debido a que éste incrementa los ángulos de las asíntotas y de esta manera, mueve los lugares geométricos alejándolos del eje imaginario. El ángulo de una asíntota es

$$\frac{\pi}{n-m}$$

donde n es el número de polos y m, el número de ceros. Al incrementar m, cuando $n > m$, el ángulo se acerca a $\pi/2$ y así hace los lugares geométricos paralelos al eje imaginario. Cuando los lugares geométricos son paralelos al eje entonces no existe valor de K para el cual se da como resultado la inestabilidad. La introducción de un polo extra tiene el efecto contrario.

Un sistema de orden superior será más complicado que los sistemas antes estudiados. Sin embargo, si se tienen polos o ceros más cercanos al origen que otros, éstos dominarán el comportamiento dinámico del sistema y, de esta manera, sólo con su frecuencia y factor de amortiguamiento relativo a menudo serán suficientes para describir el comportamiento del sistema. Las raíces más cercanas al origen del plano s se denominan *raíces dominantes*. Existe una dominancia razonable si el cociente de las partes reales de las raíces es mayor o

casi 5. La función de transferencia y, por lo tanto, el análisis de los lugares geométricos de las raíces se puede simplificar considerando sólo las raíces dominantes.

Para ilustrar el concepto de raíces dominantes, considere un sistema con una función de transferencia en lazo cerrado de

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+5)}$$

Las raíces son -1 y -5. La respuesta del sistema a un impulso unitario es

$$\theta_o(s) = \frac{5}{(s+1)(s+5)}$$

$$\theta_o = 5 \times 0.25(e^{-1t} - e^{-5t})$$

Por lo general, el término e^{-5t} se puede despreciar en comparación con el término e^{-1t} de modo que la respuesta es, en efecto

$$\theta_o \approx 5 \times 0.25\, e^{-1t}$$

Para obtener esto como solución se requiere un sistema con una función de transferencia de

$$G(s) = \frac{5 \times 0.25}{(s+1)}$$

El polo $s = -1$ es, de este modo, el polo dominante. Sin embargo, en general el numerador se modifica para que prevalezca la misma salida en estado estable. Este es el valor de $G(s)$ cuando $s = 0$, es decir, 1. Por lo tanto, la aproximación más usual es

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

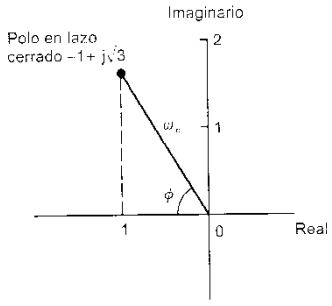


Figura 9.28 Ejemplo 6

Ejemplo 6

¿Cuál es la frecuencia angular natural y el factor de amortiguamiento relativo para un sistema que tiene una función de transferencia en lazo cerrado con una ecuación característica de

$$s^2 + 2s + 4$$

Respuesta

Las raíces de la ecuación característica están dadas por

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$$

y son, de este modo $-1 \pm j\sqrt{3}$. Por lo tanto, la raíz $-1 + j\sqrt{3}$ forma un triángulo rectángulo con una hipotenusa ω_n y catetos de longitud 1 y $\sqrt{3}$ (figura 9.28), y así

$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega^2$$

$$\omega_n^2 = 1^2 + 1.7^2 = 4$$

Por lo tanto, $\omega_n = 2$ rad/s. El factor de amortiguamiento relativo es el coseno del ángulo ϕ, y así

$$\zeta = \cos\phi = \tfrac{1}{2}$$

Ejemplo 7

Un sistema tiene una función de transferencia en lazo abierto de

$$G_o(s) = \frac{K}{(s+2+j2)(s+2-j2)}$$

a) Esbozar el diagrama del lugar geométrico de las raíces.

b) ¿Cuál es *i*) la frecuencia angular, *ii*) el factor de amortiguamiento relativo, *iii*) el tiempo de levantamiento y *iv*) el tiempo de asentamiento para 2% para $K = 10$?

c) El sistema produce un error en estado estable que se sugiere eliminar mediante la inclusión de un bloque con una función de transferencia de $1/s$ en la trayectoria directa. ¿Cuál será ahora el diagrama del lugar geométrico de las raíces?

d) ¿Cuál será el tiempo de asentamiento de 2% modificado cuando $K = 10$?

e) ¿Cómo afecta la modificación a la estabilidad relativa para $K = 10$?

Respuesta

a) Siguiendo los pasos antes expuestos para trazar un diagrama del lugar geométrico de las raíces:

1 El sistema tiene realimentación unitaria y, de esta manera, la función de transferencia del sistema es

$$G(s) = \frac{K}{(s+2+\mathrm{j}2)(s+2-\mathrm{j}2)+K}$$

La ecuación característica es, por lo tanto

$$(s+2+\mathrm{j}2)(s+2-\mathrm{j}2)+K = 0$$

2 Cuando $K = 0$ la ecuación característica se convierte en

$$(s+2+\mathrm{j}2)(s+2-\mathrm{j}2) = 0$$

Los polos en lazo abierto están de esta manera, en $-2 \pm \mathrm{j}2$. No hay ceros.

3 La ecuación es de segundo grado y, así, se tienen dos lugares geométricos.

4 No hay porciones de los lugares geométricos de las raíces sobre el eje real.

5 Los ángulos de las asíntotas serán, debido a que $n - m = 2$, $\pi/2$ o 90°.

6 La intersección de las asíntotas con el eje real será

$$\frac{(-2+\mathrm{j}2)+(-2-\mathrm{j}2)}{2} = -2$$

7 Cualesquiera puntos de intersección de los lugares geométricos con el eje imaginario se pueden determinar haciendo $s = j\omega$ en la ecuación característica. Ésta da por resultado

$$(\mathrm{j}\omega+2+\mathrm{j}2)(\mathrm{j}\omega+2-\mathrm{j}2)+K = 0$$

$$-\omega^2 + \mathrm{j}4\omega + 8 + K = 0$$

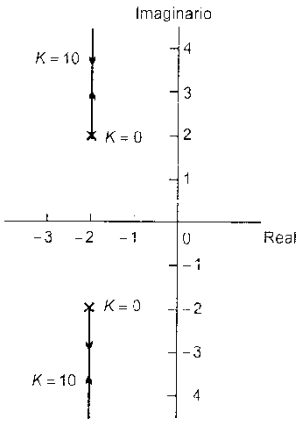


Figura 9.29 Ejemplo 7

Por lo tanto, al igualar las partes imaginarias se obtiene $\omega = 0$ y, al igualar las partes reales, $K = -8$. De este modo, los lugares geométricos no cruzan el eje imaginario, puesto que sólo se está interesado cuando se presentan con los valores positivos de K.

8 Debido a que los lugares geométricos no tocan el eje real no hay puntos de desprendimiento.

9 Sólo se tiene un par de polos complejos y no hay ceros. Los ángulos de partida del lugar geométrico en $K = 0$, desde un polo complejo, se determinan mediante la ecuación de argumento [6] y si s es un punto sobre el lugar geométrico de las raíces muy cercano a $(-2 + j2)$. Puesto que $\alpha_1 = 90°$ entonces el ángulo al polo $(-2 + j2)$ o α_2 está dado por

$$(\alpha_2 + 90°) = \pm \text{ múltiplo impar de } 180°$$

Por lo tanto, $\alpha_2 = 90°$.

10 La figura 9.29 muestra el diagrama completo del lugar geométrico de las raíces.

b) Cuando $K = 10$ la ecuación característica se convierte en

$$(s + 2 + j2)(s + 2 - j2) + 10 = 0$$

la cual se convierte en

$$s^2 + 4s + 18 = 0$$

De esta manera, las raíces son

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 72}}{2} = -2 \pm j\sqrt{14} = -2 + j3.7$$

i) La frecuencia angular se puede obtener con la ecuación [9]

$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega^2$$
$$\omega_n^2 = 2^2 + (\sqrt{14})^2$$

Por lo tanto, $\omega_n = 4.2$ rad/s.

ii) El factor de amortiguamiento relativo se puede obtener mediante la ecuación [10]

$$\xi = \cos\phi = \frac{2}{4.2} = 0.48$$

iii) El tiempo de levantamiento está dado por la ecuación [12] como

$$t_r = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{14}} = 0.42 \text{ s}$$

iv) El tiempo de asentamiento de 2% se puede obtener con la ecuación [11]

$$t_s \frac{4}{\sigma} = 2 \text{ s}$$

c) Los lugares geométricos de las raíces para la función de transferencia modificada se pueden obtener siguiendo los pasos expuestos al inicio del capítulo:

1 El sistema tiene realimentación unitaria y, de esta manera, la función de transferencia del sistema es

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2+j2)(s+2-j2)+K}$$

Así, la ecuación característica es

$$s(s+2+j2)(s+2-j2)+K=0$$

2 Cuando $K=0$ la ecuación característica se convierte en

$$s(s+2+j2)(s+2-j2)=0$$

De esta manera, los polos en lazo abierto son 0, y $-2 \pm j2$. No hay ceros.

3 La ecuación es de tercer grado y, por lo tanto, hay tres lugares geométricos.

4 Las porciones de los lugares geométricos de las raíces sobre el eje real son desde 0 hasta infinito.

5 Los ángulos de las asíntotas serán (puesto que $n-m=3$) $\pi/3$ o 60°, $3\pi/3$ o 180° y $5\pi/3$ o 300°.

6 El punto de intersección de las asíntotas es

$$\frac{0+(-2+j2)+(-2-j2)}{3} = -\frac{4}{3}$$

7 Cualquier punto de intersección de los lugares geométricos con el eje imaginario se puede obtener haciendo $s = j\omega$ en la ecuación característica, lo cual da como resultado

$$j\omega(j\omega+2+j2)(j\omega+2-j2)+K=0$$

$$-j\omega^3-4\omega^2+j8\omega+K=0$$

Por lo tanto, al igualar las partes imaginarias se obtiene $-\omega^3+8\omega=0$ y al igualar las partes reales, $4\omega^2+K=0$ y, así, $\omega = \pm 2.8$ y $K=32$.

8 El punto de desprendimiento se determina a partir de la ecuación característica, la cual es

$$s(s+2+j2)(s+2-j2)+K=0$$

Ésta se puede simplificar a

$$s^3+4s^2+8s+K=0$$

$$K=-s^3-4s^2-8s$$

entonces

$$\frac{dK}{ds} = -3s^2-8s-8$$

Al igualar esta ecuación a cero se tiene

$$3s^2+8s+8=0$$

Las raíces de esta ecuación son

$$\frac{-8 \pm \sqrt{64-96}}{6} = -1.3 \pm j0.9$$

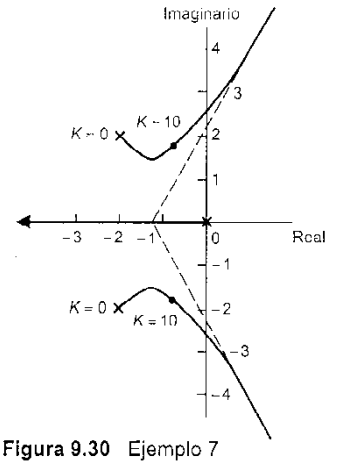


Figura 9.30 Ejemplo 7

No hay punto de desprendimiento sobre el eje real.

9 Los ángulos de partida de los lugares geométricos en $K = 0$ desde los polos complejos se determinan mediante la ecuación de argumento [6] y si s es un punto sobre el lugar geométrico de las raíces muy cercano al polo $-2 + j2$.

$$(\alpha_1 + 135° + 90°) = \pm \text{ múltiplo impar de } 180°$$

$$-225° - \alpha_1 = \pm 180° \text{ o } \pm 540°$$

Por lo tanto, $\alpha_1 = 45°$ o $315°$

10 La figura 9.30 describe el diagrama completo del lugar geométrico de las raíces.

d) Cuando $K = 10$ la ecuación característica se convierte en

$$s(s + 2 + j2)(s + 2 - j2) + 10 = 0$$

la cual se convierte en

$$s^3 + 4s^2 + 8s + 10 = 0$$

Debido a que estas raíces estarán sobre los lugares geométricos en la figura 9.30, una de las raíces de la ecuación debe estar sobre el eje real y las otras dos deben ser complejas. Las raíces son -2.4 y $-0.8 \pm 1.9j$.

El tiempo de asentamiento de 2% se puede obtener mediante la ecuación [11]

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{5}{0.8} = 6.25 \text{ s}$$

De este modo, al introducir el término $1/s$ se incrementa el tiempo de asentamiento.

e) Con $K = 10$ el sistema original da $\sigma = -2$ y con la modificación ésta es -0.8. Por lo tanto, la estabilidad relativa se ha reducido. Una forma de resolver esto, así como reducir el tiempo de asentamiento será reducir el valor de K.

Ejemplo 8

Un sistema en lazo cerrado tiene tres polos y ningún cero. *a*) ¿Qué se puede decir acerca de su estabilidad y *b*) cómo se puede mejorar su estabilidad relativa?

Respuesta

a) Los ángulos de las asíntotas serán $\pi/3$, $3\pi/3$ y, $5\pi/3$ y de este modo interceptará en algún valor de ganancia con el eje imaginario. Así, en dicho valor de ganancia el sistema se hace inestable.

b) La estabilidad relativa se puede mejorar al agregar un cero. Esto dará entonces asíntotas en ángulos de $\pi/2$ y $3\pi/2$. Ninguna de las cuales dará intersecciones con el eje imaginario; por el contrario, dará lugares geométricos paralelos a ese eje y, de esta manera se mejora la estabilidad del sistema.

Ejemplo 9

Un sistema tiene una función de transferencia en lazo abierto de

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+6)}$$

¿Cuál es la ganancia cuando hay *a*) amortiguamiento crítico, *b*) un factor de amortiguamiento relativo de 0.6?

Respuesta

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema será

$$G(s) = \frac{K}{s(s+6)+K} = \frac{K}{s^2+6s+K}$$

Por lo tanto, las raíces son

$$\frac{-6 \pm \sqrt{36-4K}}{2} = -3 \pm j\sqrt{K-9}$$

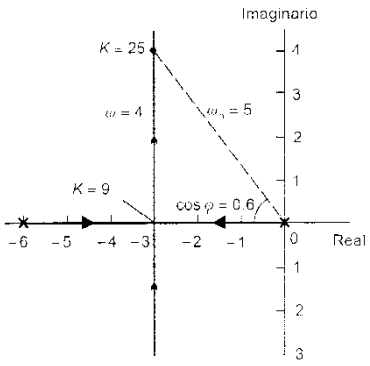


Figura 9.31 Ejemplo 8

a) El amortiguamiento crítico se presenta cuando la parte imaginaria de las raíces es cero, es decir, cuando $K-9=0$. De este modo, $K=9$.

b) El factor de amortiguamiento relativo está dado por la ecuación [8] como

$$\xi = \frac{\sigma}{\omega_n}$$

Este sistema tiene una σ con un valor de 3 y, de esta manera, para $\xi = 0.6$ se tiene que $\omega_n = 5$ rad/s. Pero de la ecuación [10] se tiene

$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega^2$$

y así

$$\omega^2 = 5^2 - 3^2$$

y, por lo tanto, $\omega = 4$ rad/s. Éste es el valor de la parte imaginaria de las raíces. De esta manera

$$4 - \sqrt{K-9}$$

y así, $K=25$. La figura 9.31 muestra el diagrama del lugar geométrico de las raíces.

Problemas

1 Esbozar los lugares geométricos de las raíces para los sistemas de la figura 9.32 y para sistemas de segundo orden establecer el valor de la ganancia K para la cual los sistemas están críticamente amortiguados.

2 Esbozar los diagramas de los lugares geométricos de las raíces para los sistemas que tienen las siguientes funciones de transferencia en lazo abierto e identificar polos, ceros, asíntotas y puntos de desprendimiento.

a) $\dfrac{K(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$

b) $\dfrac{K(s+5)}{(s+2)(s+4+j3)(s+4-j3)}$

c) $\dfrac{K}{(s+1)(s^2+9s+25)}$

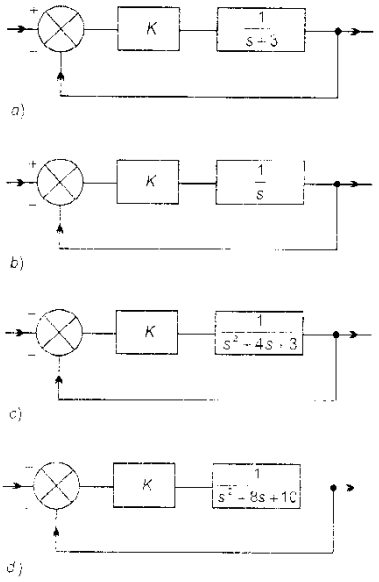


Figura 9.32 Problema 1

d) $\dfrac{K}{s^2+s+4}$

3 ¿Cuáles son las frecuencias angulares naturales y los factores de amortiguamiento relativo para los sistemas que tienen funciones de transferencia en lazo cerrado con ecuaciones características de:

a) $s^2+4s+16$.

b) $s^2+6s+12$.

c) $s^2+2s+10$.

4 ¿Cuáles son los tiempos de asentamiento de 2% y los tiempos de levantamiento para un sistema que tiene una función de transferencia en lazo abierto de

$$\frac{K}{s(s+2)}$$

cuando *a)* $K=4$ y *b)* $K=16$?

5 Un sistema dado por la función de transferencia en lazo abierto

$$\frac{K}{(s+1)(s^2+9s+25)}$$

se modifica al incluir en la trayectoria directa un elemento adicional con la función de transferencia $(s+2)$, es decir, un cero en -2. ¿Cuál es el efecto de éste sobre la estabilidad relativa del sistema?

6 ¿Cuál es la ganancia para un sistema que tiene una función de transferencia en lazo abierto de

$$G_0(s)=\frac{K}{s(s+3)}$$

cuando se tiene *a)* amortiguamiento crítico y *b)* un factor de amortiguamiento relativo de 0.3?

7 Esbozar el diagrama del lugar geométrico de las raíces y calcular la ganancia para *a)* amortiguamiento crítico y *b)* un factor de amortiguamiento relativo de 0.6 para un sistema que tiene una función de transferencia en lazo abierto de

$$G_0(s)=\frac{K}{s(s+1)}$$

10 Controladores

Introducción

Este capítulo se relaciona con la selección de la forma apropiada del controlador para una planta en un sistema de control en lazo cerrado y la determinación de los parámetros idóneos para ese controlador. El controlador es un elemento en el sistema en lazo cerrado que tiene como entrada la señal de error y produce una salida que se convierte en la entrada al elemento correctivo (vea el capítulo 1). La relación entre la salida y la entrada al controlador con frecuencia se denomina *ley de control*. Existen tres formas de dicha ley: *proporcional*, *integral* y *derivativo*, y son las que se estudian en este capítulo. En algunos sistemas es necesario mejorar el desempeño del controlador, lo cual se logra al introducir en el sistema de control elementos adicionales denominados *compensadores*. Esta alteración en el desempeño se denomina *compensación*.

Control proporcional

Con el control proporcional la salida del controlador es directamente proporcional a su entrada; la entrada es la señal de error, e, la cual es una función del tiempo. De esta manera

$$\text{Salida} = K_p e \qquad [1]$$

donde K_p es una constante llamada *ganancia proporcional*. La salida del controlador depende sólo de la magnitud del error en el instante en el que se considera. La función de transferencia, $G_c(s)$ para el controlador es, por lo tanto

$$G_c(s) = K_p \qquad [2]$$

El controlador es, en efecto, sólo un amplificador con una ganancia constante. En cierto tiempo, un error grande produce una salida grande del controlador. La ganancia constante, sin embargo, tiende a existir sólo sobre cierto rango de errores que se conoce como *banda proporcional*. Una gráfica de la salida contra el error sería una línea recta con una pendiente de K_p en la banda proporcional (figura 10.1).

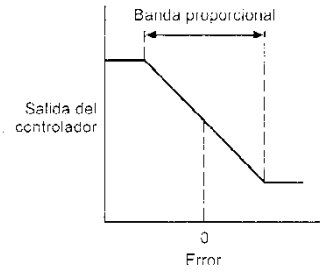


Figura 10.1 Control proporcional

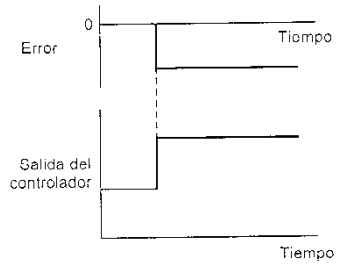


Figura 10.2 Sistema con control proporcional

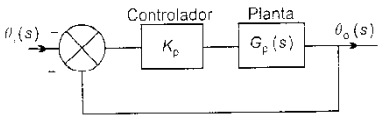


Figura 10.3 Sistema con control proporcional

Es común expresar la salida del controlador como un porcentaje de la posible salida total de éste. De este modo, un 100% de cambio en la salida del controlador corresponde a un cambio en el error desde un extremo a otro de la banda proporcional. Así

$$K_p = \frac{100}{\text{banda proporcional}} \qquad [3]$$

Debido a que la salida es proporcional a la entrada, si la entrada al controlador es un error en la forma de un escalón, entonces la salida es también un escalón, y es exactamente una versión a escala de la entrada (figura 10.2). Esto es provisto por el controlador si opera dentro de su banda proporcional.

El control proporcional es sencillo de aplicar, en esencia sólo se requiere alguna forma de amplificador. Éste podría ser un amplificador electrónico o un amplificador mecánico en forma de palanca (vea más adelante en este capítulo); el control proporcional es de la forma que describe la figura 10.3. El resultado es una función de transferencia en lazo abierto de

$$G_o(s) = K_p G_p(s) \qquad [4]$$

donde $G_p(s)$ es la función de transferencia de la planta.

La principal desventaja del sistema es que el controlador no introduce un término $1/s$ o integrador en la trayectoria directa. Esto significa que si el sistema fuera de tipo 0, entonces el controlador no cambiaría y seguiría siendo de tipo 0 con los consecuentes errores en estado estable (vea el capítulo 7). El controlador no introduce nuevos ceros o polos al sistema, sólo determina la ubicación de los polos en lazo cerrado. Esto se debe a que la función de transferencia en lazo cerrado es con el controlador, y la realimentación unitaria es

$$G(s) = \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)}$$

y, de esta manera, la ecuación característica $(1 + K_p G_p(s))$ tiene los valores de sus raíces afectados por K_p.

Ejemplo 1

Si la planta de la figura 10.3 tiene una función de transferencia de

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

y se usa con control proporcional, ¿cuál será *a*) el tipo de sistema, *b*) los errores en estado estable cuando se usa con *i*) una entrada escalón, *ii*) una entrada rampa?

Respuesta

a) El sistema tendrá una función de transferencia en lazo abierto de

$$G_o(s) = \frac{K_p}{s(s+1)}$$

De este modo, el sistema es de tipo 1. Vea el capítulo 7 para mayor detalle.

b) i) El error en estado estable, e_{ss}, está dado por (vea capítulo 7)

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left[s \frac{1}{1 + G_o(s)} \theta_i(s) \right]$$

donde, para una entrada escalón $\theta_i(s) = 1/s$. Así

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left\{ s \frac{1}{1 + [K_p / s(s+1)]} \frac{1}{s} \right\}$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0$$

Así, para una entrada escalón un sistema de tipo 1 tiene un error en estado estable cero.

ii) Para una entrada rampa, la entrada es $1/s^2$ y el error en estado estable es

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left\{ s \frac{1}{1 + [K_p / s(s+1)]} \frac{1}{s^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{K_p}$$

Control integral

Con el control integral la salida del controlador es proporcional a la integral de la señal de error e con el tiempo, es decir,

$$\text{Salida} = K_i \int_0^t e \, dt \qquad [5]$$

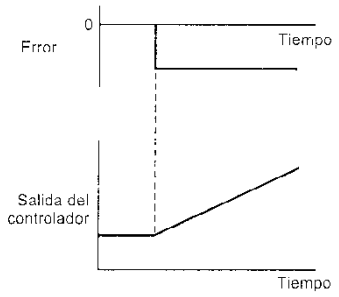


Figura 10.4 Control integral

donde K_i es la constante denominada *ganancia integral*. Ésta tiene unidades de s^{-1}. La figura 10.4 muestra qué pasa cuando el error es de la forma de un escalón. La integral entre 0 y t es, de hecho, el área bajo la gráfica del error entre 0 y t. Así, debido a que después de que el error comienza, el área se incrementa en una razón regular, la salida del controlador se debe incrementar en una razón regular. La salida en cualquier tiempo es, entonces, proporcional a la acumulación de los efectos de los errores pasados.

Al tomar la transformada de Lapalce de la ecuación [5] da por resultado la función de transferencia, para el controlador integral, de

$$G_c(s) = \frac{\text{salida}(s)}{e(s)} = \frac{K_i}{s} \qquad [6]$$

Así, para el sistema de la forma que se ilustra en la figura 10.5, el control integral da una función de transferencia de la trayectoria directa de $(K_i/s)G_p(s)$ y, por lo tanto, una función de transferencia en lazo abierto de

$$G_o(s) = \left(\frac{K_i}{s} \right) G_p(s) \qquad [7]$$

Una ventaja del control integral es que la introducción de un término s en el denominador incrementa el tipo de sistema en 1. De esta manera, si el sistema hubiera sido de tipo 0, el error en estado estable que se habría presentado con la entrada escalón desaparecería cuando se presentara el control integral. Una desventaja del control integral es que el término $(s-0)$ en el denominador significa que se ha introducido un polo en el origen. Puesto que no se introducen ceros, la diferencia entre el número de polos n y de ceros m se incrementa en 1. Una consecuencia de lo anterior es que los ángulos de las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces decrecen, es decir, éstas apuntan más hacia el semiplano derecho del plano s y, de este modo, se reduce la estabilidad relativa.

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \pm\frac{\pi}{n-m}, \quad \frac{3\pi}{n-m}, \quad \text{etcétera.}$$

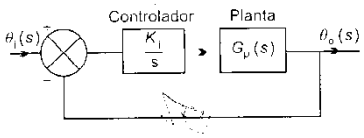


Figura 10.5 Control integral

Ejemplo 2

Si la planta de la figura 10.5 tiene una función de transferencia de

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

y se usa con el control integral, ¿cuál será *a*) el tipo de sistema, *b*) los errores en estado estable cuando se usa con *i*) una entrada escalón, *ii*) una entrada rampa y *c*) cómo se compara la estabilidad con la que se presentaría si hubiera control proporcional (como en el ejemplo 1)?

Respuesta

a) El sistema tendrá una función de transferencia en lazo abierto de

$$G_o(s) = \frac{K_i}{s^2(s+1)}$$

Por lo tanto, el sistema es de tipo 2. Vea el capítulo 7 para mayor detalle.

b) *i*) El error en estado estable, e_{ss}, está dado por (vea el capítulo 7)

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{1}{1+G_o(s)}\theta_i(s)\right]$$

donde, para una entrada escalón $\theta_i(s) = 1/s$. Así

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left\{s\frac{1}{1+[K_i/s^2(s+1)]}\frac{1}{s}\right\}$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0$$

De este modo, para una entrada escalón un sistema de tipo 1 tiene un error en estado estable cero.

ii) Para una entrada rampa, la entrada es $1/s^2$ y el error en estado estable es

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left\{s\frac{1}{1+[K_i/s^2(s+1)]}\frac{1}{s^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0$$

De esta manera, para una entrada rampa hay un error en estado estable cero, lo cual mejora la situación del ejemplo 1, donde se tenía un control proporcional.

c) Para la situación del control proporcional del ejemplo 1 el sistema tenía una función de transferencia de

$$G(s) = \frac{K_p/[s(s+1)]}{1 + K_p/[s(s+1)]} = \frac{K_p}{s(s+1) + K_p}$$

La ecuación característica es de esta manera

$$s^2 + s + K_p = 0$$

El arreglo de Routh (véase el capítulo 8) para éste es

s^2	1	K_p
s^1	1	
s^0	K_p	

En la primera columna todos los términos son positivos, si K_p es mayor que 0.

Para la situación del control integral el sistema tiene una función de transferencia de

$$G(s) = \frac{K_i/[s^2(s+1)]}{1 + K_i/[s^2(s+1)]} = \frac{K_i}{s^2(s+1) + K_i}$$

La ecuación característica es, entonces

$$s^3 + s^2 + K_i$$

El arreglo de Routh (véase el capítulo 8) es

s^3	1	0
s^2	1	K_i
s^1	$-K_i$	
s^0	K_i	

De este modo, un cambio de control proporcional a control integral, en esta instancia, da por resultado la inestabilidad. La figura 10.6 muestra los diagramas del lugar geométrico de las raíces para las dos situaciones: diagrama *a*) con el control proporcional y *b*) con el control integral.

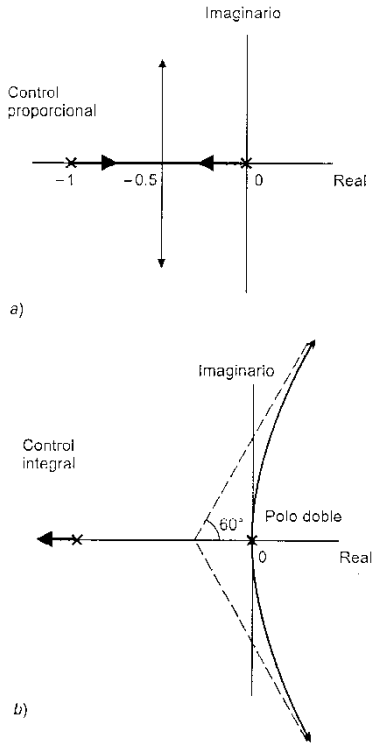


Figura 10.6 Ejemplo 2

Control proporcional integral

La reducción en la estabilidad relativa como resultado de usar el control integral se puede resolver, como una extensión, mediante el control proporcional integral (PI, figura 10.7). Para tal combinación la salida del controlador es

$$\text{Salida} = K_p e + K_i \int_0^t e\,dt \qquad [8]$$

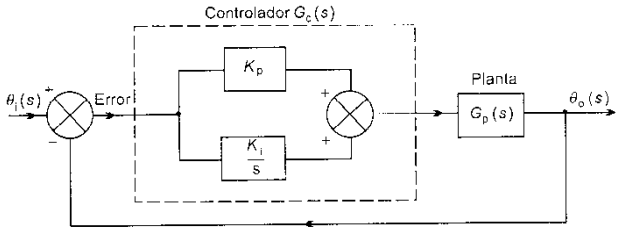


Figura 10.7 Control proporcional integral

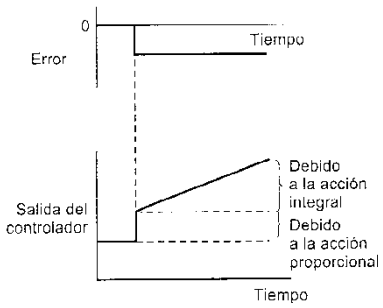


Figura 10.8 Control proporcional integral

La figura 10.8 ilustra el tipo de salida del controlador que se presenta con dicho sistema cuando existe una entrada de error tipo escalón. Al tomar la transformada de Laplace de la ecuación [8] se obtiene una función de transferencia, salida(s)/e(s), para el controlador PI de

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$
$$= \frac{sK_p + K_i}{s}$$
$$= \frac{K_p[s + (K_i/K_p)]}{s}$$

(K_p/K_i) se denomina *constante de tiempo integral*, τ_i. De esta manera

$$G_c(s) = \frac{K_p[s + (1/\tau_i)]}{s} \qquad [9]$$

En consecuencia, la función de transferencia de la trayectoria directa para el sistema de la figura 10.7 es

$$G_o(s) = \frac{K_p[s + (1/\tau_i)]G_p(s)}{s} \qquad [10]$$

De esta manera, mediante el uso del control PI se adicionan un cero en $-(1/\tau_i)$ y un polo en 0. El factor $1/s$ incrementa el tipo de sistema en 1 y elimina la posibilidad de un error en estado estable para una entrada escalón. Debido a que se introducen un nuevo polo y un nuevo cero, la diferencia entre el número de polos n y número de ceros m permanece sin cambio. Así, los ángulos de las asíntotas para los lugares geométricos de las raíces no cambian.

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \pm\frac{\pi}{n-m}, \quad \frac{3\pi}{n-m}, \quad \text{etcétera.}$$

Sin embargo, el punto de intersección de las asíntotas con el eje real se mueve hacia el origen y, en consecuencia, se presenta cierta reducción en la estabilidad relativa

$$\text{Punto de intersección} = \frac{\text{suma de polos} - \text{suma de ceros}}{n-m}$$

Adicionar el polo en 0 y el cero en $s = -(1/\tau_i)$ da por resultado que el punto de intersección cambia por $+(1/\tau_i)/(n-m)$ a la derecha y se hace más positivo y cercano al origen. Sin embargo, la reducción en

la estabilidad relativa no es tanto como lo es con el control integral solo.

La posición del cero que se introduce está determinada por la ganancia integral, K_i, es decir, ésta se determina mediante la constante de tiempo integral, τ_i. La ganancia proporcional, K_p, determina las posiciones de los polos en lazo cerrado (vea la sección sobre control proporcional al principio del capítulo).

Ejemplo 3

Si la planta de la figura 10.7 tiene una función de transferencia de

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

y se usa con control proporcional integral, ¿cuál será *a*) el tipo de sistema, *b*) los errores en estado estable cuando se usa con *i*) una entrada escalón, *ii*) una entrada rampa y *c*) cómo se compara la estabilidad con la que se presentaría si se tuviera *i*) control proporcional (como en el ejemplo 1), *ii*) control integral (como en el ejemplo 2)? La constante de tiempo integral es 2 s.

Respuesta

a) El sistema tendrá una función de transferencia en lazo abierto según la ecuación [10] como

$$G_0(s) = \frac{K_p[s + (1/\tau_i)]G_p(s)}{s} = \frac{K_p(s+0.5)}{s^2(s+1)}$$

Por lo tanto, el sistema es de tipo 2. Vea el capítulo 7 para mayores detalles.

b) *i*) El error en estado estable, e_{ss}, con una entrada escalón es cero para un sistema de tipo 2 (vea el ejemplo 2).

ii) Para una entrada rampa un sistema de tipo 2 da un error en estado estable cero (vea el ejemplo 2). El sistema es, de esta manera, mejor que al que sólo se aplica control proporcional e igual que al que sólo se aplica control integral.

c) Para la situación del control proporcional integral el sistema tiene una función de transferencia de

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K_p[s + (1/\tau_i)]G_p(s)/s}{1 + K_p[s + (1/\tau_i)]G_p(s)/s} \\ &= \frac{K_p[s+0.5][1/s(s+1)]/s}{1 + K_p[s+0.5][1/s(s+1)]/s} \\ &= \frac{K_p[s+0.5]}{s^2(s+1) + K_p(s+0.5)} \end{aligned}$$

La ecuación característica es, entonces

$$s^3 + s^2 + K_p s + 0.5K_p = 0$$

El arreglo de Routh (vea el capítulo 8) es

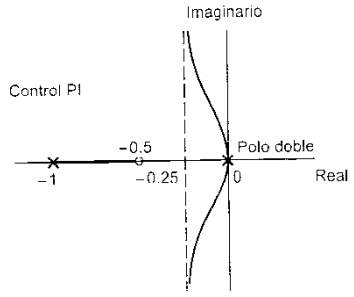


Figura 10.9 Ejemplo 3

s^3	1	K_p
s^2	1	$0.5K_p$
s^1	$0.5K_p$	
s^0	$0.5K_p$	

En la primera columna todos los elementos son, positivos si $0.5K_p$ es mayor que 0. La adición del control proporcional al control integral resulta en una restitución de la estabilidad. La figura 10.9 ilustra el diagrama del lugar geométrico de las raíces para el sistema. Éste se debería comparar con el diagrama del lugar geométrico de las raíces de la figura 10.6 cuando los controles proporcional e integral están separados. Al compararlo sólo con el control proporcional, la estabilidad relativa se reduce y con el control PI, las asíntotas están más cercanas al eje imaginario, pero comparado sólo con el control integral el control PI ha empujado los lugares geométricos de las raíces hacia la izquierda en el plano s.

Control derivativo

Con la forma derivativa del controlador, la salida del controlador es proporcional a la razón de cambio con el tiempo del error e, es decir

$$\text{Salida} = K_d \frac{de}{dt} \qquad [11]$$

donde K_d es la *ganancia derivativa* y tiene unidades de s. La figura 10.10 muestra qué pasa cuando hay un error de entrada rampa. Con el control derivativo, tan pronto como la señal de error inicia puede haber una salida del controlador muy grande, puesto que ésta es proporcional a la razón de cambio de la señal de error y no a su valor. De este modo puede proporcionar una acción correctiva grande antes de que se presente un error grande en realidad. Sin embargo, si el error es constante, entonces no hay acción correctiva, aun si el error es grande. Así, el control derivativo es insensible a señales de error constantes o que varían con lentitud y, en consecuencia, no se usa solo, sino combinado con otras formas de controlador.

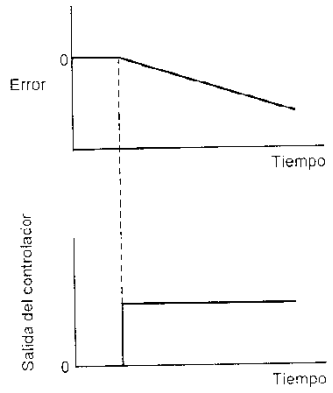


Figura 10.10 Control derivativo

Al tomar la transformada de Laplace de la ecuación [11] resulta, para el control derivativo, una función de transferencia salida $(s)/e(s)$

$$G_c(s) = K_d s \qquad [12]$$

Por lo tanto, para el sistema en lazo cerrado que muestra la figura 10.11, la presencia del control derivativo produce una función de transferencia en lazo abierto de

$$G_o(s) = \frac{K_d s G_p(s)}{1 + K_d s G_p(s)} \qquad [13]$$

Si la planta es de tipo 1 o mayor, entonces la aplicación de la acción derivativa es para cancelar una s en el denominador y así reducir el orden en 1. No obstante, como antes se mencionó, la acción derivativa no se usa sola sino sólo en conjunto con otra forma de controla-

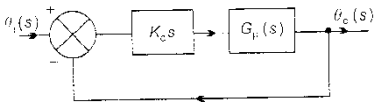


Figura 10.11 Control derivativo

dor. Cuando se usa esta acción de control se logra que la respuesta sea más rápida.

Existen dificultades en la implantación de una ley de control derivativa, por lo que en la práctica se obtiene una aproximación mediante el uso de un compensador de adelanto (vea más adelante en este capítulo). Éste tiene una función de transferencia de la forma $K(s+z)/(s+p)$, con $p > z$.

Control proporcional derivativo

Si el control derivativo se usa con el control proporcional (figura 10.12), entonces la función de transferencia en lazo abierto se convierte en

$$G_o(s) = (K_p + K_d s)G_p(s)$$

$$G_o(s) = K_d[(1/\tau_d) + s]G_p(s) \qquad [14]$$

donde $\tau_d = K_p / K_d$ y se denomina *constante de tiempo derivativa*. Con esta forma de control se ha introducido un cero en $s = -1/\tau_d$. Tampoco habrá cambios en el tipo de sistema y, por lo tanto, en los errores en estado estable.

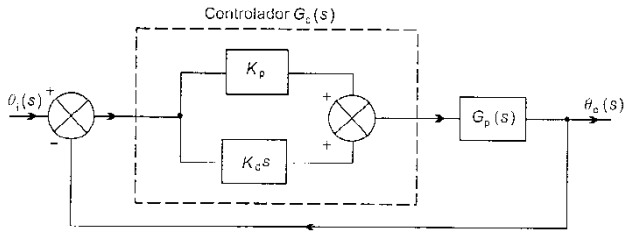


Figura 10.12 Control proporcional derivativo

Ejemplo 4

Si la planta del sistema de la figura 10.12 tiene una función de transferencia de

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

y se usa con el control proporcional derivativo, ¿cuál será *a*) el tipo de sistema, *b*) los errores en estado estable cuando se usa con *i*) una entrada escalón, *ii*) una entrada rampa y *c*) cuál es la condición para la estabilidad? La constante de tiempo derivativa es de 2 s.

Respuesta

a) El sistema tendrá una función de transferencia en lazo abierto dada por la ecuación [14] como

$$G_o(s) = K_d[(1/\tau_d) + s]G_p(s) = \frac{K_d(s+0.5)}{s(s+1)}$$

Por lo tanto, el sistema es de tipo 1. Vea el capítulo 7 para mayores detalles.

b) *i*) El error en estado estable, e_{ss} es cero para una entrada escalón con un sistema de tipo 1. Vea el capítulo 7 y el ejemplo 1 en este capítulo.

ii) Para una entrada rampa, $\theta_i(s)$ es $1/s^2$ y el error en estado estable es

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{1}{1+G_o(s)}\theta_i(s)\right]$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left\{s\frac{1}{1+[K_d(s+0.5)/s(s+1)]}\frac{1}{s^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{0.5K_d}$$

Puesto que $(1/\tau_d) = 0.5 = K_p/K_d$ entonces

$$e_{ss} = \frac{1}{K_p}$$

c) Para la situación del control proporcional derivativo el sistema tiene una función de transferencia de

$$G(s) = \frac{K_d(s+0.5)G_p(s)}{1+K_d(s+0.5)G_p(s)}$$

$$= \frac{K_d(s+0.5)[1/s(s+1)]}{1+K_d(s+0.5)[1/s(s+1)]}$$

$$= \frac{K_d(s+0.5)}{s(s+1)+K_d(s+0.5)}$$

La ecuación característica es entonces

$$s^2 + (1+K_d)s + 0.5K_d = 0$$

El arreglo de Routh (vea el capítulo 8) para este sistema es

s^2	1	$0.5K_d$
s^1	$1+K_d$	
s^0	$0.5K_d$	

En la primera columna todos los términos son positivos y el sistema es estable si K_d es positiva. La figura 10.13 muestra el diagrama del lugar geométrico de las raíces para el sistema. Esto se debería comparar con el diagrama de la figura 10.6 cuando el control proporcional y el integral están por separado.

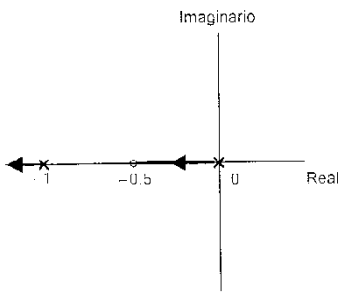


Figura 10.13 Ejemplo 4

Control PID

El controlador proporcional integral derivativo (PID), mejor conocido como *controlador de tres términos*, con un sistema de la forma que ilustra la figura 10.14 dará una salida, para una entrada de error e, de

$$\text{Salida} = K_p e + K_i \int_0^t e\,dt + K_d \frac{de}{dt} \qquad [15]$$

La función de transferencia, salida $(s)/e(s)$, del controlador es, de esta manera

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \qquad [16]$$

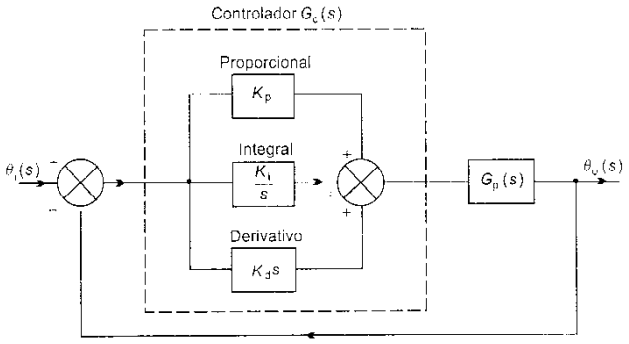


Figura 10.14 Control PID

Debido a que la constante de tiempo integral, τ_i, es K_p/K_i y la constante de tiempo derivativa, τ_d, K_d/K_p, la ecuación [15] se puede escribir como

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{K_i}{K_p s} + \frac{K_d s}{K_p}\right)$$

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right) \qquad [17]$$

La función de transferencia en lazo abierto para el sistema de la figura 10.14 es

$$G_o(s) = G_c(s)G_p(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right)G_p(s)$$

$$G_o(s) = \frac{K_p(\tau_i s + 1 + \tau_i \tau_d s^2)G_p(s)}{\tau_i s} \qquad [18]$$

De este modo, el controlador PID ha incrementado el número de ceros en 2 y el número de polos en 1. También el factor $1/s$ incrementa el tipo de sistema en 1. En la ecuación anterior se supone que se ha empleado un diferenciador ideal. En la práctica, como se indicó antes en este capítulo, se usa un compensador de adelanto.

Ejemplo 5

Si la planta en el sistema de la figura 10.14 tiene una función de transferencia de

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

y se usa control PID, ¿cuál será *a*) el tipo de sistema, *b*) los errores en estado estable cuando se usa con *i*) una entrada escalón, *ii*) una entrada rampa, *c*) las posiciones de los polos y ceros en lazo abierto y *d*) la condición para la estabilidad? La constante de tiempo derivativa es de 0.5 *s* y la constante de tiempo del integral, de 2 *s*.

Respuesta

a) El sistema tendrá una función de transferencia en lazo abierto dada por la ecuación [18] como

$$G_o(s) = \frac{K_p(\tau_i s + 1 + \tau_i \tau_d s^2) G_p(s)}{\tau_i s}$$

$$G_o(s) = \frac{K_p(s^2 + 2s + 1) G_p(s)}{2s} = \frac{K_p(s^2 + 2s + 1)}{2s^2(s+1)}$$

$$G_o(s) = \frac{K_p(s+1)}{2s^2}$$

De esta manera el sistema es de tipo 2. Véase el capítulo 7 para mayores detalles.

b) *i*) El error en estado estable e_{ss} es cero para una entrada escalón con un sistema de tipo 2. Véase el capítulo 7 y también el ejemplo 2 en este capítulo.

ii) El error en estado estable e_{ss} es cero para una entrada rampa con un sistema de tipo 2. Véase el capítulo 7 y también el ejemplo 2 en este capítulo.

c) La función de transferencia en lazo abierto del inciso *a* indica que el sistema tiene un cero de -1 en lazo abierto y polos de 0 y 0. Uno de los polos originales ha sido cancelado por un cero introducido por el controlador.

d) Para la situación del control PID, el sistema tiene una función de transferencia de

$$G(s) = \frac{K_p(s+1)/2s^2}{1 + K_p(s+1)/2s^2}$$

$$= \frac{K_p(s+1)}{2s^2 + K_p(s+1)}$$

De este modo, la ecuación característica es

$$2s^2 + K_p s + K_p = 0$$

El arreglo de Routh (véase el capítulo 8) para este sistema es

s^2	2	K_p
s^1	K_p	
s^0	K_p	

Todos los términos de la primera columna son positivos y el sistema es estable si K_p es positiva. La figura 10.15 ilustra el diagrama del lugar geométrico de las raíces para el sistema.

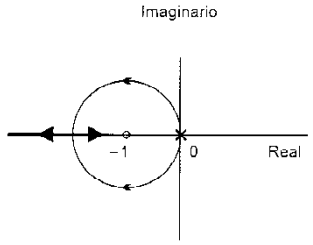


Figura 10.15 Ejemplo 5

Ajuste de las ganancias del controlador

El uso del control proporcional sólo requiere la elección de una variable: la ganancia proporcional, K_p, para que el sistema de control tenga el comportamiento dinámico requerido. El uso de un controlador PI requiere la selección de dos variables: la ganancia proporcional K_p y la ganancia integral, K_i. Con un controlador PID se deben seleccionar tres variables: la ganancia proporcional, K_p, la ganancia integral, K_i, y la ganancia derivativa, K_d. La selección de estas variables permite localizar los polos y ceros que introduce el controla-

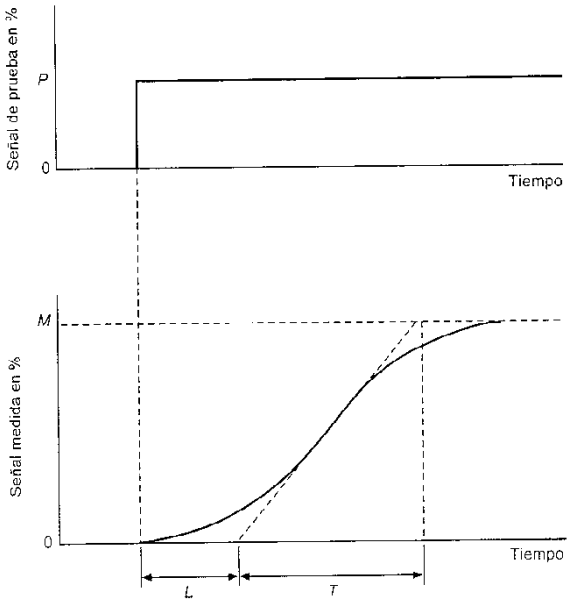


Figura 10.16 Curva de reacción de proceso

dor a ser determinados y, por lo tanto, afectan la estabilidad del sistema de control.

Para describir el proceso de selección de los mejores valores para el controlador se usa el término *sintonización*. Existen varios métodos para lograrlo, pero aquí sólo se estudiarán dos métodos, los de Ziegler y Nichols. Ambos métodos se basan en experimentación y análisis, éstos son recetas de cocina útiles que se usan con mucha frecuencia. El primer método a menudo se denomina *método de la curva de reacción del proceso*. El procedimiento con este método consiste en abrir el lazo de control de modo que no se presenten acciones de control. En general, la ruptura del lazo se hace entre el controlador y la unidad de corrección. Se aplica, entonces, una señal de prueba a la unidad de corrección y se determina la respuesta de la variable de proceso medida, es decir, la señal de error. La señal de prueba deberá ser tan pequeña como sea posible. La figura 10.16 muestra la forma de la señal de prueba y una repuesta típica. La gráfica de la señal medida se grafica contra el tiempo y se conoce como la *curva de reacción del proceso*.

La señal de prueba, P, se expresa como el porcentaje de cambio en la unidad de corrección. La variable medida se expresa como el porcentaje del rango a escala completa. Para dar el máximo gradiente de la gráfica se traza una tangente. Para la figura 10.16 el máximo gradiente R es M / T. El tiempo entre la aplicación de la señal de prueba y cuando esta tangente intersecta el eje de tiempo de la gráfica se denomina atraso L. La tabla 10.1 proporciona los criterios recomendados por Ziegler y Nichols para los valores del controlador con base en los valores de P, R y L.

Tabla 10.1 Criterios de Ziegler y Nichols para la curva de reacción del proceso

Modo de control	K_p	K_i	K_d
Proporcional solamente	P/RL		
Proporcional + integral	$0.9\ P/RL$	$1/3.33L$	
Proporcional + integral + derivativo	$1.2\ P/RL$	$1/2L$	$0.5\ L$

El otro método se conoce como el *método de la última ganancia*. Primero, las acciones integral y derivativa se reducen a sus valores mínimos. La constante proporcional, K_p, se fija en un valor bajo y, entonces, se incrementa en forma gradual. Esto es lo mismo que decir que la banda proporcional se hace más angosta de manera gradual. Mientras esto sucede, al sistema se le aplican pequeñas perturbaciones. El proceso continúa hasta que se presentan oscilaciones. Se anota el valor crítico de la constante proporcional, K_{pc}, en la que se presentan las oscilaciones, así como el tiempo, T_c, de éstas. La tabla 10.2 muestra los criterios de Ziegler y Nichols sobre cómo se relacionan los valores de K_{pc} y T_c para establecer los valores del controlador. La banda proporcional crítica es $100/K_{pc}$.

Tabla 10.2 Criterios de Ziegler y Nichols para la última ganancia

Modo de control	K_p	K_i	K_d
Proporcional solamente	$0.5\ K_{pc}$		
Proporcional + integral	$0.45\ K_{pc}$	$1.2/T_c$	
Proporcional + integral + derivativo	$0.6\ K_{pc}$	$2.0/T_c$	$T_c/8$

Ejemplo 6

Determinar los valores que deben tener K_p, K_i y K_d requeridos para un controlador de tres modos, a partir de la curva de reacción del proceso de la figura 10.17 cuando la señal de prueba fue un 6% de cambio en la posición de la válvula de control.

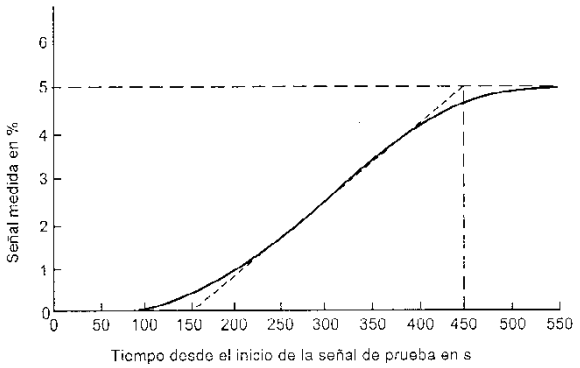


Figura 10.17 Ejemplo 6

Respuesta

Se dibuja una tangente en la parte de máximo gradiente de la gráfica que da un atraso, L, de 150 s y un gradiente, R, de 5/300 = 0.017 %/s. Por lo tanto

$$K_p = \frac{1.2P}{RL} = \frac{1.2 \times 6}{0.017 \times 150} = 2.82$$

$$K_i = \frac{1}{2L} = \frac{1}{2 \times 150} = 0.0033\,s^{-1}$$

$$K_d = 0.5L = 0.5 \times 150 = 75\,s$$

Ejemplo 7

Cuando se sintonizó un controlador de tres modos en un sistema de control, mediante el método de la última ganancia, se encontró que las oscilaciones iniciaban cuando la banda proporcional decrecía hasta un 30%. Las oscilaciones tienen un periodo de 500 *s*. ¿Cuáles son los valores apropiados de K_p, K_i y K_d?

Respuesta

El valor crítico de K_{pc} es 100/banda proporcional crítica y, así, 100/30 = 3.33. De esta manera, con base en los criterios de la tabla 10.2.

$$K_p = 0.6K_{pc} = 0.6 \times 3.33 = 2.0$$

$$K_i = \frac{2}{T_c} = \frac{2}{500} = 0.004\,s^{-1}$$

$$K_d = \frac{T_c}{8} = \frac{500}{8} = 62.5\,s$$

Realimentación de velocidad

En muchos sistemas se involucra el posicionamiento de algún objeto, por ejemplo, el brazo de un robot; en este caso, el requerimiento es que el sistema responda con rapidez a los errores y no producir excesivas oscilaciones, o sobrepasos. Esto se puede lograr incorporando dentro del lazo principal de realimentación una trayectoria de realimentación menor que introduzca lo que se denomina *realimentación de velocidad*, término que describe un lazo de realimentación donde la señal que se alimenta de regreso no es el valor de la salida sino la razón de cambio con el tiempo de la salida. Para esta realimentación la salida de la trayectoria de realimentación se relaciona con su entrada mediante

$$\text{Salida} = K_v \frac{d\theta_o}{dt} \qquad [19]$$

y, de esta manera, la trayectoria de realimentación tiene una función de transferencia de

$$H(s) = K_v s \qquad [20]$$

K_v es una constante, la ganancia de realimentación, con unidades de s.

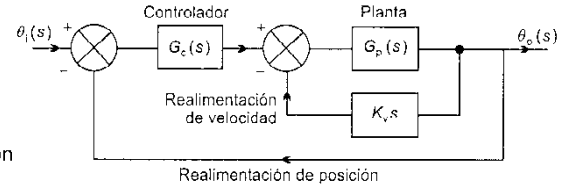


Figura 10.18 Sistema con realimentación de velocidad y posición

El término de *realimentación de posición* se usa en circunstancias en las que se realimenta el valor de la salida. Estos términos surgen a partir del uso primario de sistemas de control para controlar la posición de algún objeto; la realimentación de posición es, entonces, una medida de la posición del objeto y la realimentación de velocidad, una medida de la velocidad del objeto. La figura 10.18 muestra un sistema con ambas formas de realimentación. En estos sistemas la función de transferencia en lazo abierto es

$$G_o(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_p(s)K_v s} \qquad [21]$$

y la función de transferencia en lazo cerrado es

$$G(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_p(s)K_v s + G_p(s)G_c(s)} \qquad [22]$$

El efecto de la realimentación de velocidad ha sido el introducir un término $G_p(s)K_v s$ en el denominador y, de este modo, en la ecuación característica.

El efecto de esto se puede ver al considerar un ejemplo. Considere un sistema con control proporcional, ganancia K_p, y una planta con una función de transferencia $1/s(s+a)$. La función de transferencia en lazo abierto es

$$G_o(s) = \frac{K_p/s(s+a)}{1 + K_v s/s(s+a)} = \frac{K_p}{s(s+a) + K_v s} = \frac{K_p}{s(s+a+K_v)} \qquad [23]$$

La realimentación de velocidad modifica el denominador y, por lo tanto, la posición de las raíces en lazo abierto. Las raíces, las cuales estaban en 0 y en a en ausencia de la realimentación de velocidad, están ahora en 0 y $-(a+K_v)$. La figura 10.19 ilustra el efecto sobre el diagrama del lugar geométrico de las raíces. Como consecuencia de la realimentación de velocidad se mejoró la estabilidad relativa, se incrementó el factor de amortiguamiento relativo para la misma frecuencia natural angular y la frecuencia natural angular se incrementó para el mismo factor de amortiguamiento relativo. El sobrepaso en porcentaje es (ecuación [33] del capítulo 3)

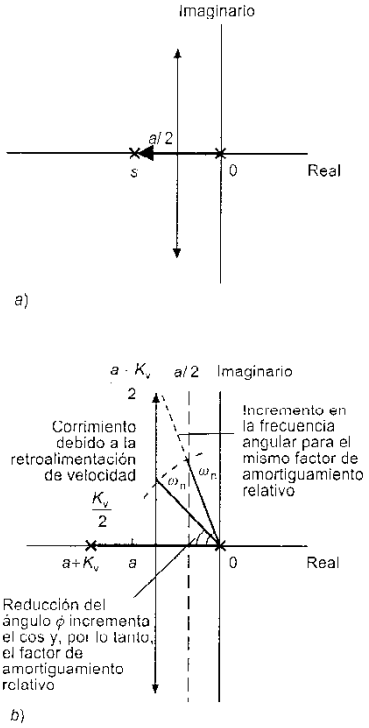


Figura 10.19 El efecto de la realimentación de velocidad: *a*) sin , *b*) con realimentación de velocidad

$$\exp\left[\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]\times 100\%$$

Debido a que $\zeta = \cos\phi$, entonces

$$\text{Sobrepaso} = \exp\left[\frac{-\cos\phi}{\sqrt{1-\cos^2\phi}}\right]\times 100\%$$

$$= \exp\left[\frac{-\cos\phi}{\sqrt{\text{sen}^2\phi}}\right]\times 100\%$$

Así el sobrepaso en porcentaje es

$$\text{Sobrepaso} = \exp(-1/\tan\phi)\times 100\% \qquad [24]$$

El efecto de incluir la realimentación de velocidad es reducir ϕ para un valor particular de la frecuencia natural angular. Esto significa una reducción en la $\tan\phi$ y, en consecuencia, un decremento en el sobrepaso en porcentaje.

Ejemplo 8

Un sistema en lazo cerrado tiene un controlador proporcional de ganancia K_p, una planta de función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

y una realimentación de posición unitaria: *a*) ¿Qué ganancia proporcional se requiere para que la frecuencia natural angular sea de 2 rad/s? (*b*) ¿Cuál es el factor de amortiguamiento relativo en esa frecuencia? *c*) Si se introdujera la realimentación de velocidad como en la figura 10.18, ¿cuál sería la ganancia de velocidad necesaria para que el factor de amortiguamiento relativo se duplique para la misma frecuencia angular?

Respuesta

El diagrama del lugar geométrico de las raíces sin la realimentación de velocidad y con ésta se muestra en la figura 10.19.

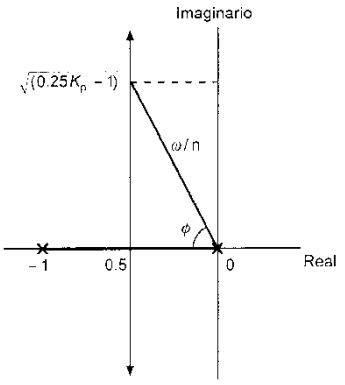


Figura 10.20 Ejemplo 8

a) La función de transferencia en lazo abierto para el sistema es

$$G_o(s) = \frac{K_p}{s(s+1)}$$

Las raíces en lazo abierto están en 0 y −1. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$G(s) = \frac{K_p/s(s+1)}{1+K_p/s(s+1)} = \frac{K_p}{s(s+1)+K_p}$$

Ésta tiene la ecuación característica

$$s^2 + s + K_p = 0$$

Las raíces de esta ecuación son

$$\frac{-1\pm\sqrt{1-4K_p}}{2} = -0.5 \pm j\sqrt{K_p - 0.25}$$

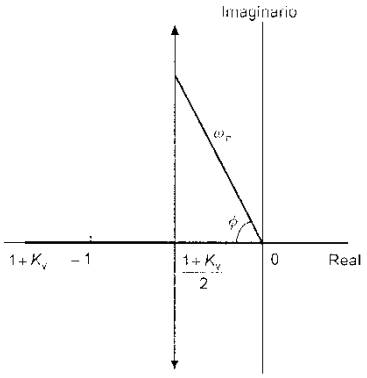


Figura 10.21 Ejemplo 8

Por lo tanto, la frecuencia natural angular, ω_n, es (figura 10.20)

$$\omega_n^2 = 0.5^2 + \left(\sqrt{K_p - 025}\right)^2$$

Así, para $\omega_n = 2$ rad/s, entonces $K_p = 4.0$.

b) El factor de amortiguamiento relativo, ζ, es $\cos\phi$ y, por lo tanto, según la figura 10.20

$$\zeta = \frac{0.5}{2} = 0.25$$

c) Con la realimentación de velocidad la función de transferencia en lazo abierto se convierte, como antes se indicó mediante la ecuación [23], en

$$G_o(s) = \frac{K_p}{s(s+1+K_v)}$$

De esta manera, los polos en lazo abierto se convierten en 0 y $-(1+K_v)$. El diagrama del lugar geométrico de las raíces, entonces, se convierte como muestra la figura 10.21. Entonces

$$\zeta = \cos\phi = \frac{\frac{1}{2}(1+K_v)}{\omega_n}$$

Puesto que ω_n permanece sin cambio en 2 rad/s y ζ es el doble de 0.25, entonces

$$\tfrac{1}{2}(1+K_v) = 0.5 \times 2$$

y así, $K_v = 1$.

Compensación

Los *compensadores* se pueden definir como componentes insertos en el sistema de control para aumentar el desempeño del controlador. Si se considera que el controlador va a tener como base un controlador proporcional, entonces, como ejemplo, se puede considerar que un controlador PI va a ser un controlador proporcional con un compensador integral. Cuando el compensador se incluye en la trayectoria directa del lazo de control se dice entonces que éste va a ser un *compensador en cascada*. De esta manera, el compensador integral es el compensador integral en cascada. El efecto de incluir un compensador se trató al inicio en este capítulo, lo que tendrá principalmente una mejora respecto a los errores en estado estable y una reducción en la estabilidad.

Los compensadores se usan para mejorar el desempeño y para moldear al lugar geométrico de las raíces. Así, el compensador integral introduce un polo en el origen y, de este modo, cambia la posición y forma de los lugares geométricos de las raíces (vea las figuras 10.6 y 10.9 como ejemplos de esto). Las dos formas más comunes de compensadores en cascada tienen la función de transferencia

$$G_c(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p)} \qquad [25]$$

cuando $z > p$ se conoce como *compensador de atraso en cascada*, y cuando $z < p$, como *compensador de adelanto en cascada*. De esta

manera, ambos compensadores introducen un cero y un polo; sin embargo, entre los dos difiere la posición relativa del polo y el cero.

Un compensador de atraso en cascada introduce el polo en lazo abierto más cercano al origen que el cero. En muchos aspectos éste es como un control proporcional integral; sin embargo, la principal diferencia es que el polo que se introduce no está en el origen. Del mismo modo que con el control PI, el punto de intersección de las asíntotas sobre el eje real se mueve a la derecha y así existe alguna reducción en la estabilidad. Los ángulos de las asíntotas permanecen sin alteración, puesto que no hay cambio en $(n - m)$. Sin embargo, puesto que no hay un factor $1/s$ no hay cambio en el tipo de sistema.

Un compensador de adelanto en cascada introduce el cero más cercano al origen que el polo. En muchos aspectos éste es como un control proporcional derivativo, pero la principal diferencia es que el cero no se introduce en el origen. Como con el control PD, el punto de intersección de las asíntotas sobre el eje real se mueve a la izquierda y, así, existe una mejora en la estabilidad. Los ángulos de las asíntotas permanecen sin alteración, puesto que no hay cambio en $(n - m)$. No se introduce un factor $1/s$ y, de esta manera, no hay cambio en el tipo de sistema.

Ejemplo 9

Mostrar el efecto sobre el diagrama del lugar geométrico de las raíces de un sistema con una función de transferencia en lazo abierto de

$$G_o(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

al introducir en la trayectoria directa un compensador de adelanto con una función de transferencia de

$$G_c(s) = \frac{s+2}{s+8}$$

y explicar el efecto sobre la estabilidad relativa.

Respuesta

El sistema sin compensar tiene polos en lazo abierto en 0 y −1 y no tiene ceros. Las asíntotas están a ángulos de $\pi/2$ e intersectan el eje real en $-1/2$, debido a que $n - m = 2$. El lugar geométrico sigue el eje real entre las dos raíces. Los lugares geométricos se desprenden del eje real en -0.5. En consecuencia, el diagrama del lugar geométrico de las raíces es como se describe en la figura 10.22*a*.

El sistema compensado tiene una función de transferencia en lazo abierto de

$$G_o(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+8)}$$

De esta manera hay polos en lazo abierto en 0, −1 y −8 con un cero en −2. Las asíntotas están en ángulos de $\pi/2$ e intersectan el eje real en $-7/2$, puesto que $n - m = 2$. Los lugares geométricos siguen al eje real entre 0 y −1, y entre −2 y −8. El punto de desprendimiento del eje real está aún alrededor de -0.5. De esta manera, el diagrama del lugar geométrico de las raíces es como se ilustra en la figura 10.22*b*.

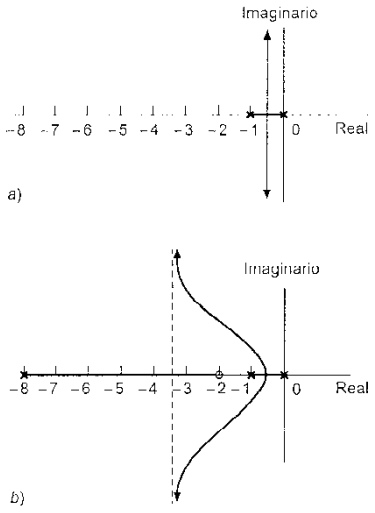


Figura 10.22 Ejemplo 9

Puesto que la intersección de las asíntotas con el eje real se ha movido de −0.5 hasta −3.5 existe una mejora en la estabilidad relativa.

Implantación de las leyes de control

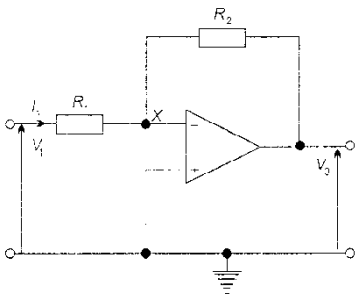


Figura 10.23 Amplificador operacional en configuración inversora

En sistemas de control eléctricos con frecuencia se usan amplificadores operacionales como la base para generar las leyes de control requeridas. La figura 10.23 muestra la forma básica de dicho amplificador cuando éste se conecta como si fuera a usarse como un amplificador inversor. El amplificador tiene dos entradas, conocidas como la entrada inversora (−) y la entrada no inversora (+). Para usarse como amplificador inversor, la entrada se conecta a través de un resistor, R_1, a la entrada inversora del amplificador y la entrada no inversora se conecta a tierra. Una trayectoria de realimentación está provista por el resistor R_2. El amplificador operacional tiene una ganancia grande en lazo abierto, del orden de 100 000 o más, y el cambio en su voltaje de salida está limitado, en general, en alrededor de ±10 V. Para producir esa salida con esta ganancia, el voltaje de entrada debe estar entre 0.00001 V y −0.00001 V. Éste es virtualmente cero y, así, el punto X está virtualmente a un potencial de tierra. Por esta razón a ese punto se le llama tierra virtual. La diferencia de potencial a través de R_1 es $V_1 - V_x$, por lo tanto, el potencial de entrada, V_1, se puede considerar como el voltaje a través de R_1 y, de esta manera

$$V_1 = I_1 R_1$$

El amplificador operacional tiene una impedancia de entrada muy alta y de esta manera virtualmente no fluye corriente hacia su interior a través del punto X. Por lo tanto, la corriente, I_1, fluye sólo a través de R_2. Puesto que X es la tierra virtual, y debido a que la diferencia de potencial a través de R_2 es $V_x - V_0$, entonces la diferencia de potencial a través de R_2 será virtualmente $-V_0$. Por lo que

$$-V_0 = I_1 R_2$$

$$\text{Función de transferencia} = \frac{V_0}{V_1} = -\frac{R_2}{R_1} \qquad [26]$$

Así, la función de transferencia está determinada por los valores relativos de R_2 y R_1. El signo negativo indica que la salida está invertida, es decir, desfasada 180° respecto a la entrada.

Como indica la ecuación [26], el amplificador operacional inversor tiene una ganancia de $-R_2/R_1$. El signo menos se puede eliminar pasando la salida a través de otro amplificador operacional inversor.

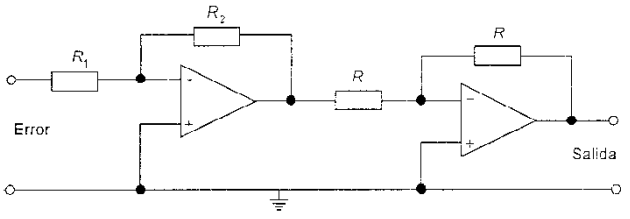


Figura 10.24 Controlador proporcional

pero esta vez uno en el que $R_2 = R_1$ y así tenga una ganancia de −1. La combinación (figura 10.24) es, entonces, un *controlador proporcional* con

$$K_p = \frac{R_2}{R_1} \qquad [27]$$

Se puede producir un controlador integral si el resistor de realimentación se reemplaza por un capacitor (figura 10.25). Para un capacitor, la ecuación [20] del capítulo 2 da por resultado

$$v = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

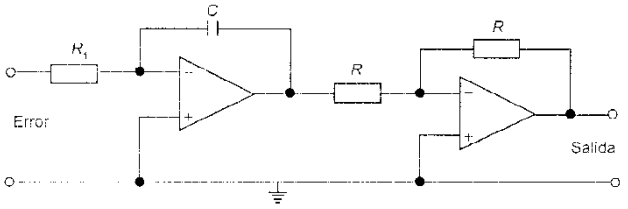


Figura 10.25 Controlador integral

De este modo

$$V(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$

y así, la impedancia Z, está dada por

$$Z(s) = \frac{1}{Cs} \qquad [28]$$

Para el circuito con amplificador operacional con el capacitor en la realimentación, la ecuación básica [26] se puede escribir como

$$\text{Función de transferencia} = -\frac{Z_2}{Z_1} \qquad [29]$$

Puesto que $Z_1(s) = R_1$ y $Z_2(s) = 1/Cs$, entonces

$$\text{Función de transferencia} = -\frac{1}{R_1 Cs}$$

Cuando el circuito se combina con otro circuito con amplificador operacional de función de transferencia −1, como muestra la figura 10.25, da por resultado

$$\text{Función de transferencia} = \frac{(1/R_1C)}{s} \qquad [30]$$

y, por lo tanto, es un controlador integral con $K_i = (1/R_1C)$. La figura 10.26 describe cómo se puede adaptar el circuito para dar un controlador PI. Para este circuito

$$Z_2(s) = R_2 + \frac{1}{Cs}$$

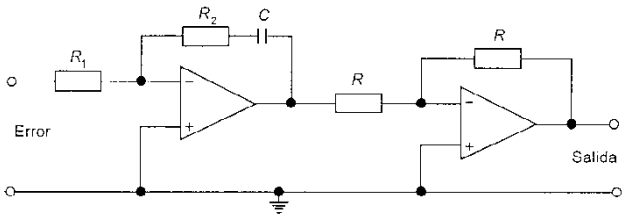


Figura 10.26 Controlador PI

y, de esta manera

$$\text{Función de transferencia} = \frac{R_2 + 1/Cs}{R_1} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{(1/R_1C)}{s} \quad [31]$$

con $K_p = R_2/R_1$ y $K_i = 1/R_1C$.

La figura 10.27 muestra cómo se puede producir un controlador derivativo. Para el amplificador operacional con capacitor y resistor en la línea de entrada se tiene, según la ecuación [29], $Z_2 = R_2$ y

$$Z_1(s) = R_1 + \frac{1}{Cs} = \frac{R_1Cs + 1}{Cs}$$

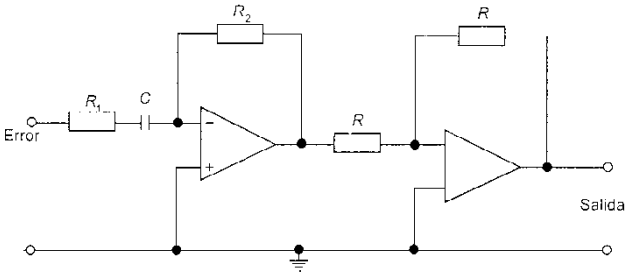


Figura 10.27 Controlador derivativo

De este modo, la ecuación [29] da por resultado

$$\text{Función de transferencia} = -\frac{R_2Cs}{R_1Cs + 1}$$

Al combinar este circuito con uno que tenga una función de transferencia de −1 da como resultado

$$\text{Función de transferencia} = \frac{R_2Cs}{R_1Cs + 1} \quad [32]$$

Así, el circuito tiene una ganancia derivativa, K_d de R_2C. La figura 10.28 muestra cómo se puede modificar el circuito para obtener un controlador PD.

La figura 10.29 ilustra cómo se pueden combinar los circuitos con amplificadores operacionales del controlador PI y el controlador D para producir un controlador PID. La función de transferencia es, entonces

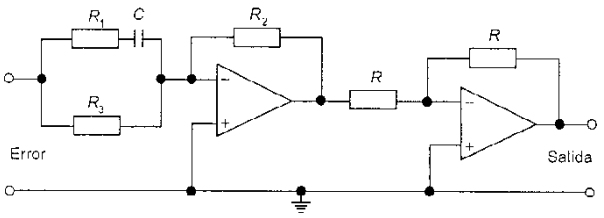


Figura 10.28 Controlador PD

$$\text{Función de transferencia} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{(1/R_1C_1)}{s} + \frac{R_4C_2s}{R_3C_2s+1} \quad [33]$$

con $K_p = R_2/R_1$, $K_i = 1/R_1C_1$ y $K_d = R_4C_2$.

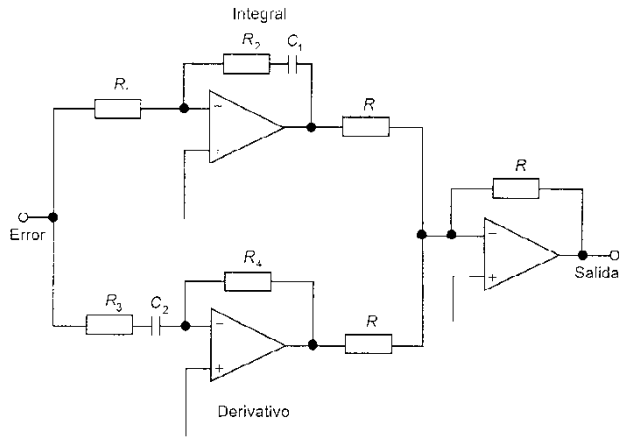


Figura 10.29 Controlador PID

La forma neumática de los controladores proporcional, integral y derivativo se usa en diversos sistemas de control de procesos. La figura 10.30 muestra la forma básica de un controlador proporcional neumático. Cuando la presión del proceso iguala la presión del punto de ajuste, el arreglo tobera-aleta produce la salida correspondiente a un error cero. Cuando la presión del proceso cambia de este valor, la aleta gira y cambia el espacio entre la aleta y la tobera. El resultado es un cambio en la presión de salida. Esta presión cambia hasta que los fuelles de realimentación ejercen una fuerza para balancear a aquélla debida a los fuelles del proceso.

La fuerza debida a la diferencia de presión entre el punto de ajuste y los fuelles del proceso es $(P_p - P_s)A_1$, donde P_p es la presión del proceso y P_s es la presión del punto de ajuste. A_1 es el área efectiva de los fuelles, se supone que para ambos es la misma área. El momento de rotación alrededor del pivote de esta fuerza es $(P_p - P_s)A_1d_1$, donde d_1 es la distancia del punto de aplicación de

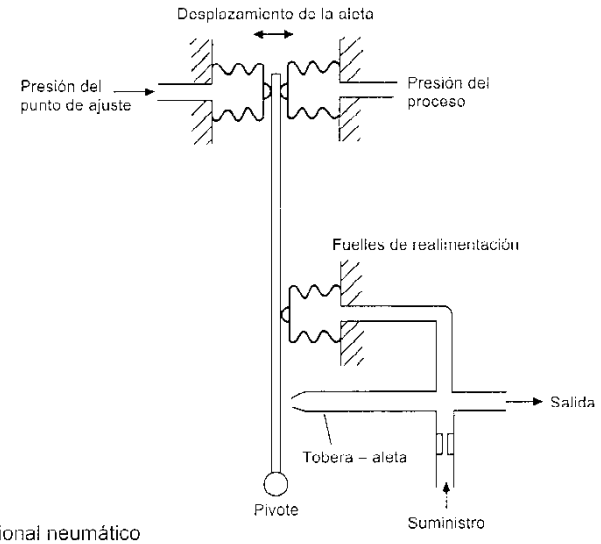


Figura 10.30 Controlador proporcional neumático

esta fuerza a partir del punto del pivote. La fuerza debida a los fuelles de realimentación cambia de la que se presenta cuando las presiones del punto de ajuste y la del proceso fueran iguales a $(P_{sal} - P_o)A_2$, donde P_{sal} es la presión de salida y P_o, el valor que tenía la presión de salida cuando no había error. A_2 es el área efectiva de los fuelles de realimentación. El momento de rotación alrededor del pivote de esta fuerza es $(P_{sal} - P_o)A_2d_2$, donde d_2 es la distancia de su punto de aplicación a partir del punto del pivote. El equilibrio se presenta y la aleta se detiene cuando

$$(P_{sal} - P_o)A_2d_2 = (P_p - P_s)A_1d_1$$

y así

$$\text{Cambio en la presión de salida} = P_{sal} - P_o = K_p(P_p - P_s) \quad [34]$$

donde K_p es la constante de proporcionalidad igual a A_1d_1 / A_2d_2.

La figura 10.31 describe la forma básica de un controlador proporcional integral neumático. Una diferencia en la presión entre los fuelles del proceso y del punto de ajuste produce un movimiento de la aleta. Esto cambia la presión de salida y la de los fuelles del proporcional. El resultado es un movimiento de la aleta hasta que el momento de rotación, debido a la fuerza que en los fuelles del proporcional, se balancea a aquella que resulta de la diferencia de presión entre los fuelles de proceso y del punto de ajuste. Mientras esto ocurre, los fuelles del integral se afectan en forma ligera debido al tiempo de retardo que introduce la restricción. Sin embargo, a medida que los fuelles del integral se acercan lentamente a la presión de salida, se mueve la aleta y, en esta forma, cambia la presión de salida.

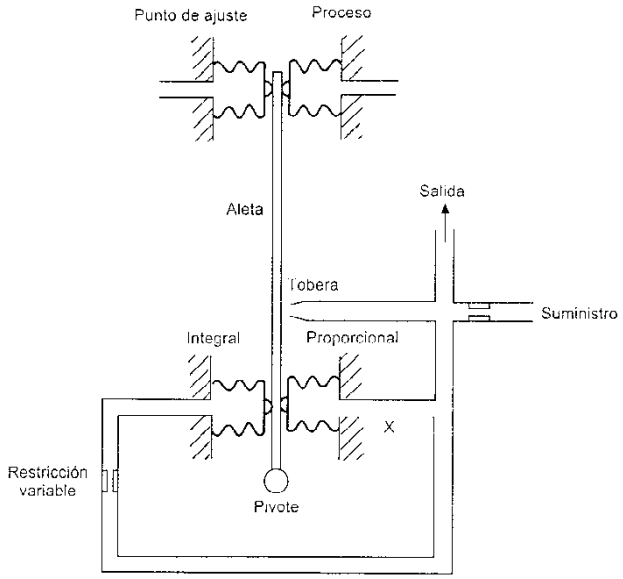


Figura 10.31 Controlador PI neumático

La figura 10.32 muestra la forma básica del controlador proporcional derivativo neumático. La restricción en el suministro de aire a los fuelles del proporcional significa que éste no puede responder con rapidez a los cambios en la presión del aire. De este modo, cuando la aleta se mueve como consecuencia de una diferencia de presión entre los fuelles del punto de ajuste y los cambios en los fuelles del proceso, al escaparse el aire de la tobera. El cambio consecuente en la presión de salida es un cambio muy rápido debido a que la restricción impide que los fuelles del proporcional respondan con rapidez. El resultado es un cambio proporcional a la razón de cambio en la diferencia de presión entre los fuelles del punto de ajuste y los del proceso. Con el tiempo los fuelles del proporcional responden y tiene lugar un cambio adicional que es proporcional a la diferencia de presión entre los fuelles del punto de ajuste y los del proceso. La restricción en la línea hacia los fuelles del proporcional es, en general, variable puesto que ésta determina el valor de K_D.

La figura 10.32 se convierte en un controlador PID si en el punto X se introduce una constricción variable, la cual introduce el elemento integral al que se refiere en la figura 10.31.

Problemas

1 Un sistema realimentado tiene una función de transferencia de la trayectoria directa de

$$\frac{1}{s(s^2+3s+5)}$$

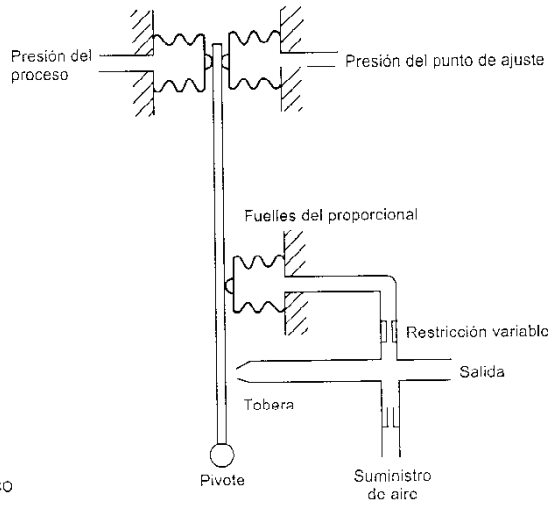


Figura 10.32 Controlador PD neumático

y realimentación unitaria. ¿Cuál será el error en estado estable con una entrada rampa unitaria si *a*) en la trayectoria directa, se introduce un controlador proporcional con ganancia 4, *b*) en lugar del controlador proporcional se usa uno integral con constante de tiempo de 2 *s*?

2 ¿Qué ceros y polos se introducen en un sistema realimentado si en la trayectoria directa se introduce un controlador PI con una ganancia proporcional de 4 y una constante de tiempo integral de 2 s?

3 Un sistema realimentado tiene una función de transferencia en lazo abierto de

$$G_0(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}$$

¿Cuánto se moverá el punto de intersección de las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces con el eje real si se introduce un controlador PI con una constante de tiempo integral de 5 *s* y una ganancia proporcional de 2?

4 Un sistema realimentado tiene un control proporcional derivativo con una planta que tiene una función de transferencia en lazo abierto

$$\frac{1}{s(s+2)}$$

Seleccionar los valores de K_p y K_d de modo que el sistema tenga una frecuencia natural angular de 0.5 rad/s y un factor de amortiguamiento relativo de 0.7.

5 Un controlador PID se usa para controlar una planta con una función de transferencia de

$$\frac{1}{s(s+3+j1)(s+3-j1)}$$

Si el controlador PID tiene una constante de tiempo integral de 4 s y una constante de tiempo derivativa de 1 s, ¿cuáles serán los ceros y los polos en lazo abierto del sistema de control?

6 Determinar los valores idóneos de K_p, K_i y K_d requeridos para un controlador de tres modos que tiene una curva de reacción del proceso con un retraso, L, de 200 s y un gradiente, R, de 0.010 %/s cuando la señal de prueba fue un cambio de 5 % en la entrada unitaria de corrección.

7 Al sintonizar un controlador de tres modos mediante el método de la última ganancia se encontró que las oscilaciones iniciaron cuando la banda proporcional se incrementó a 20 % y éstas tenían un periodo de 200 s. ¿Cuáles son los valores apropiados para K_p, K_i y K_d?

8 Describir los efectos en un sistema de control al incluir *a*) un control proporcional, *b*) un control integral, *c*) un control proporcional integral, *d*) un control proporcional derivativo y *e*) un control proporcional integral derivativo.

9 Explicar qué significa realimentación de velocidad y explicar la razón para usar dicho término.

10 ¿Cuál es el valor máximo de K, el cual dará las condiciones de estabilidad para el sistema que muestra la figura 10.33 con realimentación de velocidad y de posición?

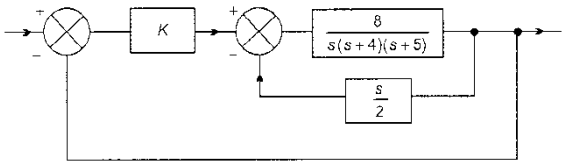


Figura 10.33 Problema 10

11 ¿Cuál es el efecto en la intersección de las asíntotas con el eje real del diagrama del lugar geométrico de las raíces y, por lo tanto, la estabilidad relativa al introducir *a*) un compensador de adelanto con una función de transferencia de $(s+2)/(s+3)$, *b*) un compensador de atraso con una función de transferencia de $(s+3)/(s+2)$ en la trayectoria directa de un sistema realimentado que tiene una función de transferencia en lazo abierto de $1/[s(s+1)]$?

12 Esbozar los diagramas del lugar geométrico de las raíces para un sistema realimentado que tiene una función de transferencia en lazo abierto de

$$G_o(s) = \frac{K}{(s+3)(s+5)}$$

cuando *a*) sin compensar, *b*) con un compensador de adelanto con una función de transferencia de $(s+1)/(s+2)$, *c*) con un compensador de atraso con una función de transferencia de $(s+2)/(s+1)$.

13 Explicar cómo se puede usar un amplificador operacional para producir las formas de control proporcional, integral y derivativo.

11 Respuesta en frecuencia

Introducción

En el capítulo 6 se consideró la salida de sistemas sujetos a una entrada impulso, escalón o rampa. Este capítulo amplía dicha consideración al caso cuando la entrada es senoidal. Mientras que en muchos sistemas de control no es posible encontrar normalmente una entrada senoidal, ésta es útil como entrada de prueba debido a que la forma en la que el sistema responde a ella es una fuente de información muy útil para auxiliar en el análisis y diseño de sistemas.

El término *respuesta en frecuencia* se define como la respuesta en estado estable de un sistema a una entrada senoidal; la respuesta se monitorea sobre un intervalo de frecuencias. La respuesta en estado estable es la que permanece después de que todos los transitorios han decaído a cero. Existen varias técnicas para analizar los datos de la respuesta en frecuencia. En este capítulo se estudiarán dos de ellas: la de Bode y la de Nyquist.

Respuesta en frecuencia

Si a un sistema lineal se aplica una entrada senoidal, la salida es también una senoidal y de la misma frecuencia. La salida puede diferir de la entrada en amplitud y en fase. El cociente de la amplitud de la salida entre la amplitud de la entrada en general se conoce como *magnitud*, aunque algunas veces se denomina razón de amplitud o ganancia. El corrimiento de fase de la senoidal de salida en relación con aquel de la senoidal de entrada se denomina *fase*. La variación de la magnitud y la fase con la frecuencia se denomina *respuesta en frecuencia* del sistema.

Función de transferencia

La función de transferencia $G(s)$ de un sistema en general se puede representar mediante

$$G(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s \quad p_n)} \qquad [1]$$

donde K es la ganancia; $z_1, z_2, \ldots z_m$, los ceros del sistema, y $p_1, p_2, \ldots p_n$, los polos, habiendo m ceros y n polos. De este modo, puesto

que $G(s)$ es el cociente de la salida entre la entrada, es decir, $G(s) = \theta_o(s)/\theta_i(s)$, entonces la salida está dada por

$$\theta_o(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)\dots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)}\theta_i(s) \qquad [2]$$

De esta manera, si se considera una entrada senoidal

$$\theta_i = a \operatorname{sen} \omega t$$

donde a es la amplitud de la entrada y ω la frecuencia angular en rad/s, entonces

$$\theta_i(s) = \frac{a\omega}{s^2 + \omega^2}$$

y la ecuación [2] se convierte en

$$\theta_o(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)\dots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)} \frac{a\omega}{s^2 + \omega^2} \qquad [3]$$

Esta ecuación se puede solucionar usando fracciones parciales y obtener una relación de la forma

$$\theta_o(s) = \text{términos transitorios} + \text{términos en estado estable}$$

Los términos transitorios desaparecen con el tiempo. De esta manera, si sólo se tiene interés en el estado estable, la solución que se obtiene es

$$\theta_o = a\,|G(j\omega)|\operatorname{sen}(\omega t + \phi) \qquad [4]$$

La salida en estado estable es senoidal con la misma frecuencia angular ω que la entrada. $|G(j\omega)|$ es la magnitud de la función de transferencia $G(s)$ cuando s se reemplaza por $j\omega$. La función $G(j\omega)$, la cual se obtiene al reemplazar s por $j\omega$ en $G(s)$, se denomina *función de respuesta en frecuencia*. De la misma manera que se habló de $G(s)$ en el dominio de s (vea el capítulo 4) se puede hablar de $G(j\omega)$ siendo la función de transferencia $G(s)$ en el *dominio de la frecuencia*. $G(j\omega)$ se puede encontrar al reemplazar todos los valores de s en $G(s)$ por $j\omega$ y, así, reordenar la expresión para obtenerla en la forma que permite separar las partes real e imaginaria y, por lo tanto, identificar la magnitud y la fase.

Considere la función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s + 2}$$

Si se hace $s = j\omega$ entonces

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$$

Si el numerador y el denominador de la expresión anterior se multiplican por $(-j\omega + 2)$, entonces

$$G(j\omega) = \frac{-j\omega + 2}{\omega^2 + 4} = \frac{2}{\omega^2 + 4} - \frac{j\omega}{\omega^2 + 4}$$

Esta ecuación proporciona la función de transferencia en frecuencia como un número complejo en la forma $x + jy$. Por lo tanto, la magnitud, $|G(j\omega)|$ (vea la nota al final de esta sección), es

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{2}{\omega^2 + 4}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega^2 + 4}\right)^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 4}}$$

y la fase ϕ está dada por

$$\tan\phi = \left[\frac{\omega/(\omega^2 + 4)}{2/(\omega^2 + 4)}\right] = -\frac{\omega}{2}$$

Puesto que el término y es negativo y el término x, positivo, entonces la tan ϕ es negativa y, de este modo, ϕ es el ángulo mediante el cual la salida se atrasa respecto a la entrada.

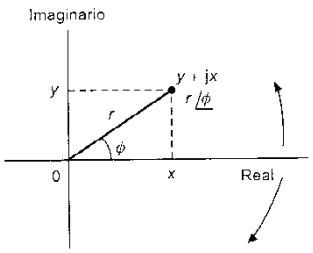


Figura 11.1 Un número complejo

Lo que se presenta a continuación es un breve recordatorio acerca de los números complejos. Una cantidad compleja se puede representar mediante $(x + jy)$, donde x es la parte real y y, la parte imaginaria del número complejo. En una gráfica con la parte imaginaria como el eje y y la parte real como el eje x, la x y la y son las coordenadas cartesianas del punto que representa al número complejo (figura 11.1). Otra manera de representarlo es en forma polar (vea el capítulo 9) como $r(\cos\phi + j\text{sen}\,\phi)$, donde sobre la gráfica de la componente imaginaria contra la componente real, r es la longitud de la línea que une el origen con el punto que representa el número complejo y ϕ es el ángulo entre la línea y el eje x. El término $(\cos\phi + j\text{sen}\,\phi)$ se puede representar mediante $\angle\phi$ y, de esta manera, el número complejo mediante $r\angle\phi$, donde r es la magnitud y ϕ, la fase del número complejo. Por lo tanto, con el teorema de Pitágoras la magnitud está dada por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad [5]$$

Y la fase ϕ, mediante

$$\tan\phi = \frac{y}{x} \qquad [6]$$

Los signos de los términos x y y se deben tener en cuenta al determinar la tan ϕ. Si las componentes y y x son positivas significaría que ϕ está entre 0 y 90°; con y positiva y x negativa, ϕ estaría entre 90° y 180°; con y negativa y x negativa, ϕ estaría entre 180° y 270°, y con y negativa y x positiva, ϕ estaría entre 270° y 360°.

Ejemplo 1

¿Cuáles son la magnitud y fase de salida en estado estable de un sistema que está sujeto a una entrada senoidal de $\theta_i = 2\text{sen}(3t + 60°)$, si éste tiene una función de transferencia de

$$G(s) = \frac{4}{s+1}$$

Respuesta

Al reemplasar s por $j\omega$ se obtiene

$$G(j\omega) = \frac{4}{j\omega + 1}$$

Al multiplicar numerador y denominador de la ecuación por $(-j\omega + 1)$ se obtiene

$$G(j\omega) = \frac{-j4\omega + 4}{\omega^2 + 1} = \frac{4}{\omega^2 + 1} - \frac{j4\omega}{\omega^2 + 1}$$

Por lo tanto

$$|G(j\omega)| = \frac{4}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

y el ángulo de fase está dado por

$$\tan\phi = \frac{y}{x} = -\omega$$

y, dado que y es negativa y x positiva, es el ángulo mediante el cual la salida se atrasa respecto a la entrada. Para una entrada específica $\omega = 3$ rad/s. En consecuencia

$$|G(j\omega)| = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 1}} = 1.3$$

y

$$\tan\phi = -\omega = -3$$

De esta manera, $\phi = -72°$. La salida, es de este modo

$$\theta_o = a|G(j\omega)|\ \text{sen}\ (\omega t + \theta + \phi)$$

donde a es la amplitud de la entrada, 2 en este caso; ω es la frecuencia angular de 3 rad/s; θ, el ángulo de fase de la entrada, y ϕ, la diferencia de los ángulos de fase entre la salida y la entrada. Por lo tanto

$$\theta_o = 2.6\ \text{sen}\ (3t - 12°)$$

Ejemplo 2

Para un sistema que tiene una función de transferencia

$$G(s) = \frac{3}{s+2}$$

determinar *a*) la magnitud y fase de la respuesta en frecuencia y *b*) hacer una tabla que muestre los valores de la magnitud y la fase con la frecuencia angular para $\omega = 0, 2, 10, 100, \infty$ rad/s.

Respuesta

a) Al reemplazar s por $j\omega$ se obtiene

$$G(j\omega) = \frac{3}{j\omega + 2}$$

Al multiplicar el numerador y el denominador de la ecuación por $(-j\omega + 2)$ se obtiene

$$G(j\omega) = \frac{-j3\omega + 6}{\omega^2 + 4} = \frac{6}{\omega^2 + 4} - \frac{j3\omega}{\omega^2 + 4}$$

La ecuación está ahora en la forma $x + jy$. Por lo tanto, según la ecuación [5]

$$\text{Magnitud} = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{3}{\sqrt{\omega^2 + 4}}$$

El ángulo de fase está dado por la ecuación [6] como

$$\tan\phi = \frac{y}{x} = -\frac{\omega}{2}$$

y, debido a que y es negativa y x positiva, éste es el ángulo de fase mediante el cual la salida se atrasa respecto a la entrada.

b) Cuando $\omega = 0$, entonces $|G(j\omega)| = 3/\sqrt{4} = 1.5$. Si $\omega = 2$, entonces $|G(j\omega)| = 3/\sqrt{8} = 1.06$. Si $\omega = 10$, $|G(j\omega)| = 3/\sqrt{104} = 0.29$. Cuando $\omega = 100$, entonces $|G(j\omega)| = 3/\sqrt{10004} = 0.03$. Si $\omega = \infty$ entonces $|G(j\omega)| = 3/\infty = 0$.

Cuando $\omega = 0$, entonces $\tan\phi = 0$ y, así, $\phi = 0°$. Si $\omega = 2$, $\tan\phi = -1$ y, $\phi = -45°$. Cuando $\omega = 10$, entonces, $\tan\phi = -5$ y, de esta manera, $\phi = 78.7°$. Si $\omega = 100$, entonces $\tan\phi = -50$ y, así, $\phi = -88.9°$. Cuando $\omega = \infty$, $\tan\phi = -\infty$ y $\phi = -90°$.

ω	0	2	10	100	∞
$\lvert G(j\omega)\rvert$	1.5	1.06	0.29	0.03	0
ϕ	0	−45°	−78.7°	−88.9°	−90°

Respuesta en frecuencia de un sistema de primer orden

Un sistema de primer orden tiene una función de transferencia de la forma

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \qquad [7]$$

donde τ es la constante de tiempo. La función de respuesta en frecuencia, $G(j\omega)$, se puede obtener reemplazando s por $j\omega$. Por lo tanto

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \qquad [8]$$

Al multiplicar el numerador y el denominador de la ecuación por $(1 - j\omega\tau)$ se obtiene

$$G(j\omega) = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} = \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} - \frac{j\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

La ecuación es ahora de la forma $(x + jy)$ y la magnitud $|G(j\omega)|$ es, mediante la ecuación [5],

$$\text{Magnitud} = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \qquad [9]$$

La fase, ϕ, está dada por la ecuación [6] como

$$\tan\phi = \frac{y}{x} = -\omega\tau \qquad [10]$$

El ángulo de fase es la cantidad por la cual la salida se atrasa respecto a la entrada dado que el término y es negativo y el x, positivo.

Ejemplo 3

La función de transferencia para un sistema (un circuito eléctrico con un resistor en serie y un capacitor a través del cual se toma la salida) es

$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

¿Cuál es: *a*) la función de respuesta en frecuencia, $G(j\omega)$, y *b*) la magnitud y la fase de esa respuesta?

Respuesta

a) El sistema es de primer orden con una constante de tiempo τ, de RC. De esta manera, la función de respuesta en frecuencia será de la forma dada por la ecuación [8], es decir, la función de transferencia donde $j\omega$ reemplaza a s.

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

b) La magnitud es, así, de la forma dada por la ecuación [9]

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

La fase ϕ, está dada por la ecuación [10] como

$$\tan\phi = -\omega RC$$

Respuesta en frecuencia para un sistema de segundo orden

Un sistema de segundo orden tiene una función de transferencia de la forma

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad [11]$$

donde ω_n es la frecuencia angular natural y ζ, el factor de amortiguamiento relativo. La respuesta en frecuencia se obtiene al reemplazar s por $j\omega$. De este modo, la función de respuesta en frecuencia, $G(j\omega)$, está dada por

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega\omega_n + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta\omega\omega_n}$$

$$= \frac{1}{[1 \quad (\omega/\omega_n)^2] + j2\zeta(\omega/\omega_n)}$$

Al multiplicar el numerador y el denominador de la ecuación por

$$[1 - (\omega/\omega_n)^2] - j2\zeta(\omega/\omega_n)$$

Se obtiene

$$G(j\omega) = \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2 - j2\zeta(\omega/\omega_n)}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}$$

La ecuación es ahora de la forma $x + jy$ y, así, la magnitud, $|G(j\omega)|$ está dada por la ecuación [5] como

$$\text{Magnitud} = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}} \qquad [12]$$

La fase ϕ, está dada por la ecuación [6] como

$$\tan\phi = \frac{y}{x} = -\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \qquad [13]$$

El signo menos indica que la salida está atrasada respecto a la entrada.

Respuesta en frecuencia a partir del patrón de polos y ceros

La magnitud y la fase de $G(j\omega)$ se pueden encontrar a partir del patrón de polos y ceros para un sistema. Suponga que se tiene un sistema con una función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Este sistema tiene un polo en $s = -1$ (figura 11.2). Si la entrada al sistema es una senoidal, entonces $s = j\omega$. Esto define un punto sobre el eje $j\omega$ de acuerdo con el valor de la frecuencia angular de entrada, ω. En la figura 11.2 se ha elegido que ω tenga el valor de 1 rad/s. La función de transferencia, entonces, se convierte en

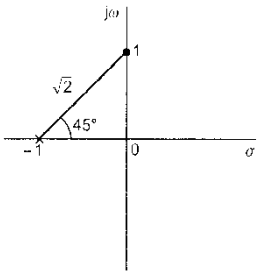


Figura 11.2 $G(j\omega)$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j1+1} = \frac{1}{\sqrt{2}\angle 45^\circ}$$

Pero $\sqrt{2}$ es la longitud de la línea que corre del polo al punto $s = j\omega$ y $\angle 45^\circ$ es el ángulo que forma la línea con el eje real. De esta manera $G(j\omega)$ es su recíproco, es decir, $(1/\sqrt{2}) \angle -45^\circ$.

En general, para una función de transferencia con varios ceros y polos, es decir,

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s-p_2)\cdots(s+p_n)}$$

entonces el procedimiento es:

1 Graficar las posiciones de cada polo y cada cero.
2 Marcar la posición $s = j\omega$.
3 Dibujar líneas de cada polo y cada cero al punto $s = j\omega$.
4 Medir las longitudes y los ángulos de cada línea.
5 La función de respuesta en frecuencia es, entonces

$$|G(j\omega)| = \frac{K \times \text{producto de las longitudes de las líneas de los ceros}}{\text{producto de las longitudes de las líneas de los polos}} \quad [14]$$

$$\angle G(j\omega) = \text{suma de los ángulos de las líneas de los ceros} - \text{suma de los ángulos de las líneas de los polos} \quad [15]$$

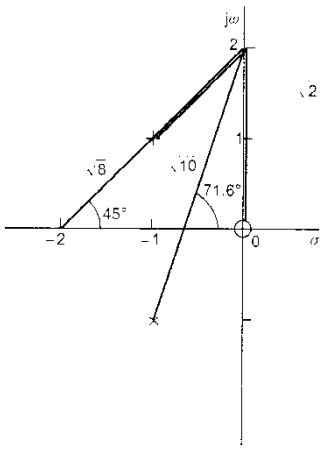


Figura 11.3 Ejemplo 4

Ejemplo 4

Un sistema tiene una función de transferencia

$$G(s) = \frac{s(s+2)}{s^2 + 2s + 2}$$

Determinar la salida del sistema cuando se le aplica una entrada de $10\text{sen } 2t$.

Respuesta

La función de transferencia se puede escribir como

$$G(s) = \frac{(s+0)(s+2)}{(s+1+j1)(s+1-j1)}$$

La figura 11.3 describe el patrón de polos y ceros; los ceros están en $s = 0$ y $s = -2$ y los polos en $s = -1 + j1$ y $s = -1 - j1$.

La entrada tiene una frecuencia angular de 2 y, de esta manera, $j\omega$ es +2. Las líneas se dibujan desde este punto a cada uno de los polos y los ceros. Los ceros dan líneas con magnitud 2, ángulo de 90° y magnitud $\sqrt{8}$, ángulo de 45°; los polos dan magnitud $\sqrt{2}$, ángulo de 45° y magnitud $\sqrt{10}$, ángulo de 71.6°. De esta manera

$$G(j\omega) = \frac{2 \times \sqrt{8}}{\sqrt{2} \times \sqrt{10}} \angle (90° + 45° - 45° - 71.6°)$$

$$= 1.26 \angle 18.4°$$

Así, dado que $G(j\omega)$ = salida/entrada para una señal senoidal, entonces, puesto que la entrada es $10 \angle 0°$

$$\text{Salida} = 1.26 \angle 18.4° \times 10 \angle 0° = 12.6 \angle 18.4°$$

$$= 12.6 \,\text{sen}\,(2t + 18.4°)$$

Respuesta en frecuencia para elementos en serie

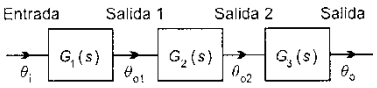


Figura 11.4 Elementos en serie

Si un sistema consta de varios elementos en serie, como en la figura 11.4, entonces la función de transferencia, $G(s)$, del sistema es el producto de las funciones de transferencia de los elementos en serie, es decir,

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)\ldots \text{etcétera.}$$

Por lo tanto, para la función de respuesta en frecuencia cuando s se reemplaza por $j\omega$

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)\ldots \text{etcétera.}$$

Puesto que $G_1(j\omega)$ se puede representar mediante una ecuación como

$$G_1(j\omega) = |G_1(j\omega)|\angle\phi_1$$

y de manera similar para las otras funciones, entonces

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= |G_1(j\omega)|\angle\phi_1 |G_2(j\omega)|\angle\phi_2 |G_3(j\omega)|\angle\phi_3 \\ &= |G_1(j\omega)||G_2(j\omega)||G_3(j\omega)|\angle(\phi_1+\phi_2+\phi_3) \end{aligned}$$

De esta manera

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)||G_2(j\omega)||G_3(j\omega)|\ldots \qquad [16]$$

y para las fases

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \ldots \qquad [17]$$

Ejemplo 5

¿Cuál es la magnitud y la fase de la función de respuesta en frecuencia de un sistema con la siguiente función de transferencia?

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(2s+1)}$$

Respuesta

Se puede considerar que el sistema consta de dos elementos en serie, uno con una función de transferencia de $1/(s+1)$ y el otro con $1/(2s+1)$. Cada sistema es de primer orden y, de esta manera, el resultado obtenido para los sistemas se puede usar para cada elemento por separado, o la respuesta en frecuencia de cada uno de los sistemas que se obtiene de los primeros principios. Para la función

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$G_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} = \frac{-j\omega+1}{\omega^2+1}$$

Por lo tanto

$$|G_1(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

y

$$\tan\phi_1 = -\omega$$

$$\phi_1 = -\tan^{-1}\omega$$

Para el segundo sistema

$$G_2(s) = \frac{1}{2s+1}$$

Por lo tanto

$$G_2(j\omega) = \frac{1}{2j\omega+1} = \frac{-2j\omega+1}{4\omega^2+1}$$

y así

$$|G_2(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4\omega^2+1}}$$

y

$$\tan\phi_2 = -2\omega$$

$$\phi_2 = -\tan^{-1} 2\omega$$

De este modo, para los dos elementos en serie, la ecuación [16] da por resultado

$$|G(j\omega)| = \left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{4\omega^2+1}}\right)$$

y la ecuación [17]

$$\phi = -\tan^{-1}\omega - \tan^{-1} 2\omega$$

Trazas de Bode

Las *trazas de Bode* consisten en dos gráficas: una de la magnitud graficada contra la frecuencia y una del ángulo de fase graficada contra la frecuencia. La magnitud y la frecuencia se grafican usando escalas logarítmicas.

Para un sistema que tiene una función de transferencia que involucra varios términos, la ecuación [16] indica que la magnitud resultante es el producto de las magnitudes de los elementos que la constituyen, es decir,

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)||G_2(j\omega)||G_3(j\omega)|\ldots$$

Al tomar logaritmos base 10, la ecuación se convierte en

$$\log|G(j\omega)| = \log|G_1(j\omega)| + \log|G_2(j\omega)| + \log|G_3(j\omega)| \quad [18]$$

De esta manera, el trazar una gráfica de $\log|G(j\omega)|$ contra la frecuencia significa que sólo se pueden sumar las contribuciones debidas a los términos de magnitud individuales. Por ejemplo, si se quisiera obtener la traza de Bode para

$$G(j\omega) = \frac{5(1+j\omega)}{2+j\omega}$$

entonces se pueden graficar por separado las gráficas logarítmicas para las magnitudes de los elementos 5, $(1+j\omega)$ y $1/(2+j\omega)$ y sólo sumarlas para obtener la traza para $|G(j\omega)|$.

Es común expresar la magnitud en unidades de decibeles (dB).

$$\text{Magnitud en dB} = 20 \log |G(j\omega)| \qquad [19]$$

Así, si $|G(j\omega)| = 2$ entonces, debido a que $20 \log 2$ es 20, la magnitud es 20 dB.

Cuando existen varios elementos, la traza de fase es sólo la suma de las fases de los elementos por separado (ecuación [19]). La escala de frecuencia que se usa para ambas trazas, magnitud y fase, es logarítmica. Esto permite a la gráfica cubrir un gran intervalo de frecuencias y también conduce a gráficas asintóticas mediante líneas rectas.

Debido a que las trazas de Bode para un sistema se pueden formar a partir de las trazas para los elementos individuales, dentro de la función de transferencia para ese sistema, es útil considerar las trazas para los elementos que por lo común se encuentran en las funciones de transferencia. Con estos elementos se pueden formar con rapidez las trazas de Bode para una amplia variedad de sistemas. Los elementos básicos que se consideran son:

Ganancia constante

Esto es donde

$$G(s) = K \qquad [20]$$

y, de esta manera

$$G(j\omega) = K \qquad [21]$$

Para dicho sistema la magnitud en decibeles es

$$|G(j\omega)| = 20 \log K \qquad [22]$$

y la fase es cero. Las trazas de Bode son, entonces, de la forma que ilustra la figura 11.5. La traza de magnitud es una línea recta de magnitud constante. Al cambiar la ganancia, K, la traza de magnitud sólo recorre hacia arriba o hacia abajo cierto número de decibeles.

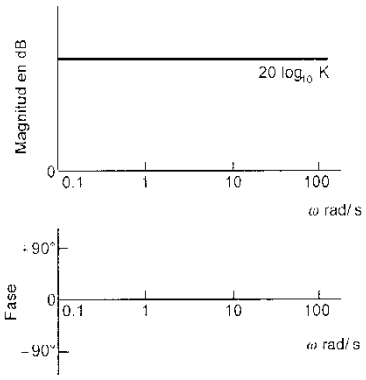


Figura 11.5 Trazas de Bode para una ganancia constante

Un polo en el origen

Esto es donde

$$G(s) = \frac{1}{s} \qquad [23]$$

y, de esta manera

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega} \qquad [24]$$

Para dicho sistema la magnitud en decibeles es

$$|G(j\omega)| = 20 \log(1/\omega) = -20 \log \omega \qquad [25]$$

Cuando $\omega = 1$ rad/s, entonces $|G(j\omega)| = 0$, y cuando $\omega = 10$ rad/s, entonces $|G(j\omega)| = -20$ dB. Para cada década de incremento en fre-

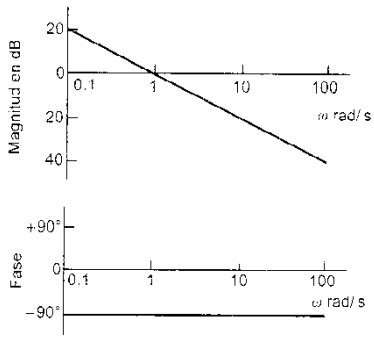


Figura 11.6 Trazas de Bode para un polo en el origen

cuencia la magnitud cae −20 dB. La traza de Bode en magnitud es, así, una línea recta de pendiente −20 dB por década de frecuencia, la cual pasa por 0 dB en $\omega = 1$ rad/s (figura 11.6). La fase de dicho sistema está dada por

$$\tan\phi = \frac{(-1/\omega)}{0} = -\infty$$

Por lo tanto, ϕ es constante para todas las frecuencias en −90°.

Un cero en el origen

Esto es donde

$$G(s) = s \qquad [26]$$

y, de esta manera

$$G(j\omega) = j\omega \qquad [27]$$

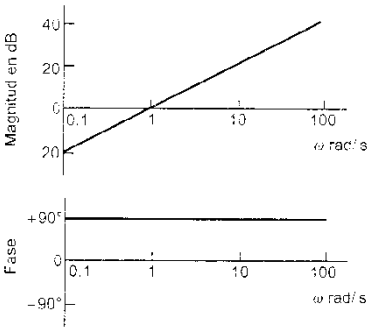


Figura 11.7 Trazas de Bode para un cero en el origen

La magnitud en decibeles es, de esta manera, $20\log\omega$. Así, cuando $\omega = 1$ rad/s, entonces $|G(j\omega)| = 0$ dB, y cuando $\omega = 10$ rad/s entonces $|G(j\omega)| = 20$ dB. La traza de Bode en magnitud es una línea recta de pendiente +20 dB por década de frecuencia, la cual pasa por 0 dB en $\omega = 1$ rad/s (figura 11.7). La fase del sistema está dada por

$$\tan\phi = \frac{\omega}{0} = +\infty$$

Por lo tanto, la fase es constante en 90° sin considerar la frecuencia.

Un polo real

Esto significa un sistema con un retraso de primer orden, donde

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \qquad [28]$$

y, de esta manera

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \qquad [29]$$

La magnitud en decibeles es

$$20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\right)$$

y el ángulo de fase

$$\tan\phi = -\omega\tau$$

Cuando $\omega << 1/\tau$, $\omega^2\tau^2$ es despreciable respecto a 1 y, de este modo, la magnitud es 0 dB. Por lo tanto, en frecuencias bajas la traza

de magnitud es una línea recta constante de valor 0 dB. Para frecuencias altas, cuando $\omega >> 1/\tau$, $\omega^2\tau^2$ es mucho mayor que 1 y, de esta manera, la magnitud se convierte en

$$20\log(1/\omega\tau) = -20\log\omega\tau$$

Ésta es una línea recta de pendiente −20 dB por década de frecuencia, la cual intercepta la recta de cero decibeles cuando $\omega\tau = 1$, es decir, cuando $\omega = 1/\tau$. La figura 11.8 describe estas trazas para frecuencias bajas y altas con sus intersecciones, las que se denominan *punto de quiebre*, *frecuencia de corte* o *frecuencia de esquina* en $\omega = 1/\tau$. Las dos líneas rectas se conocen como *aproximación asintótica* a la traza verdadera. La traza verdadera se curvea en la intersección de las dos líneas, como muestra la figura 11.8. El máximo error es de 3 dB en el punto de quiebre. En la tabla 11.1 se presentan las diferencias entre los valores verdaderos y los valores asintóticos.

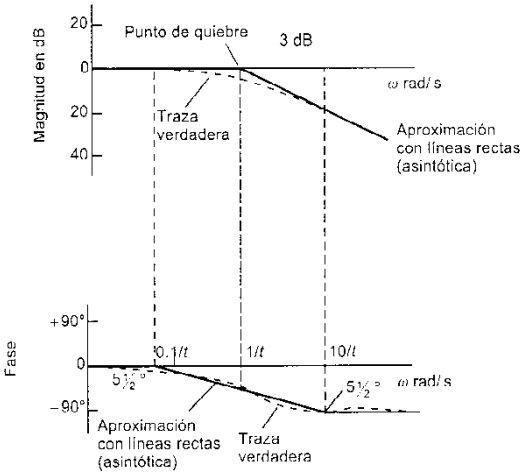


Figura 11.8 Trazas de Bode para un polo real

El ángulo de fase es $\tan^{-1}\omega\tau$. En frecuencias bajas, cuando ω es menor que alrededor de $0.1/\tau$, entonces la fase es virtualmente 0°. En frecuencias altas, cuando ω es más de $10/\tau$, entonces la fase es virtualmente −90°. Entre estos dos extremos, se puede considerar razonablemente que el ángulo de fase dé una línea recta, como en la figura 11.8. Esta línea es una aproximación asintótica. El máximo error

Tabla 11.1 Errores asintóticos para un polo real o un cero real

ω	$0.10/\tau$	$0.20/\tau$	$0.50/\tau$	$1/\tau$	$2/\tau$	$5/\tau$	$10/\tau$
Error en la magnitud (dB)	−0.04	−0.02	−1.0	−3.0	−1.0	−0.2	−0.04
Error en la fase	5.7°	+2.3°	+4.9°	0°	−4.9°	−2.3°	+5.7°

Nota: Valor verdadero = aproximación asintótica + error

es, suponiendo una línea recta, es $5\frac{1}{2}°$. En $\omega = 1/\tau$, el punto de quiebre, la fase es –45°. La tabla 11.1 muestra las diferencias entre los valores verdaderos y los valores asintóticos.

Un cero real

Esto significa un sistema de primer orden que es un adelanto, donde

$$G(s) = 1 + \tau s \qquad [30]$$

y, de esta manera

$$G(j\omega) = 1 + j\omega\tau \qquad [31]$$

La magnitud en decibeles es, de esta manera

$$20 \log \sqrt{1 - \omega^2 \tau^2}$$

y la fase

$$\tan \phi = \omega\tau$$

En frecuencias bajas, cuando $\omega << 1/\tau$, entonces el término $\omega^2\tau^2$ es insignificante en comparación con 1 y, así, la magnitud es una línea recta de 0 dB. En frecuencias altas, cuando $\omega >> 1/\tau$, entonces 1 es insignificante en comparación con el término $\omega^2\tau^2$ y así la magnitud es $20 \log \omega\tau$ y, por lo tanto, una línea recta de pendiente 20 dB por década de frecuencia con un punto de quiebre en $\omega = 1/\tau$. La figura 11.9 muestra cómo estas dos líneas, rectas se aproximan a la traza de magnitud verdadera, el máximo error sería de 3 dB en el punto de quiebre. Vea la tabla 11.1 para los errores entre los valores verdaderos y la líneas asintóticas.

El ángulo de fase es $\tan^{-1} \omega\tau$. En frecuencias bajas, cuando ω es menor que alrededor de $0.1/\tau$, la fase es virtualmente 0°. En frecuencias altas, cuando ω es mayor que alrededor de $10/\tau$, la fase es virtualmente 90°. Entre estos dos extremos en forma razonable, se puede considerar que el ángulo de fase dé una línea recta como la de la figura 11.9. El máximo error, suponiendo una línea recta, es $5\frac{1}{2}°$, vea

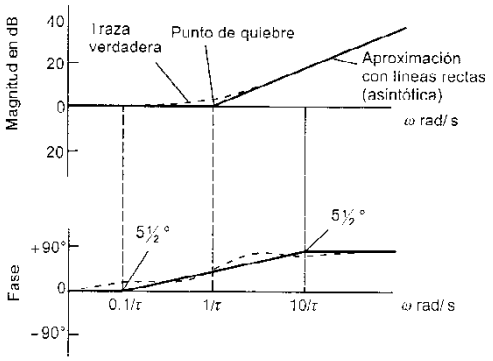


Figura 11.9 Trazas de Bode para un cero real

la tabla 11.1 para mayores detalles. En $\omega = 1/\tau$, el punto de quiebre, la fase es 45°.

Un par de polos complejos

Esto es donde

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad [32]$$

y de este modo

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega\omega_n + \omega_n^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{[1-(\omega/\omega_n)^2] + j[2\zeta(\omega/\omega_n)^2]} \qquad [33]$$

Por lo tanto se puede escribir

$$G(j\omega) = \frac{[1-(\omega/\omega_n)^2] - j[2\zeta(\omega/\omega_n)]}{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}$$

y, de esta manera, la magnitud en decibeles es

$$|G(j\omega)| = 20\log\sqrt{\frac{1}{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}}$$

$$|G(j\omega)| = -20\log\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \qquad [34]$$

y la fase es

$$\tan\phi = -\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2} \qquad [35]$$

Para $(\omega/\omega_n) << 1$, entonces la magnitud se aproxima a

$$|G(j\omega)| \approx -20\log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

Para $(\omega/\omega_n) >> 1$, entonces la magnitud se aproxima a

$$|G(j\omega)| \approx -20\log(\omega/\omega_n)^2$$

De esta manera, en frecuencias bajas la traza de magnitud es una línea recta en 0 dB, mientras que en frecuencias altas es una línea recta de pendiente –40 dB por década de frecuencia. La intersección o punto de quiebre de estas dos líneas está en $\omega = \omega_n$; éste es el valor de la expresión de alta frecuencia que da 0 dB y, por lo tanto, el punto de intersección con la línea de 0 dB. La traza de magnitud está, así, dada en forma aproximada por estas dos líneas asintóticas. Sin embargo, el valor verdadero depende del factor de amortiguamiento relativo, ζ. La figura 11.10 ilustra las dos líneas rectas y las trazas verdaderas para varios factores de amortiguamiento relativo diferentes. La tabla 11.2 presenta las diferencias entre los valores verdaderos y los asintóticos para diversos factores de amortiguamiento relativo.

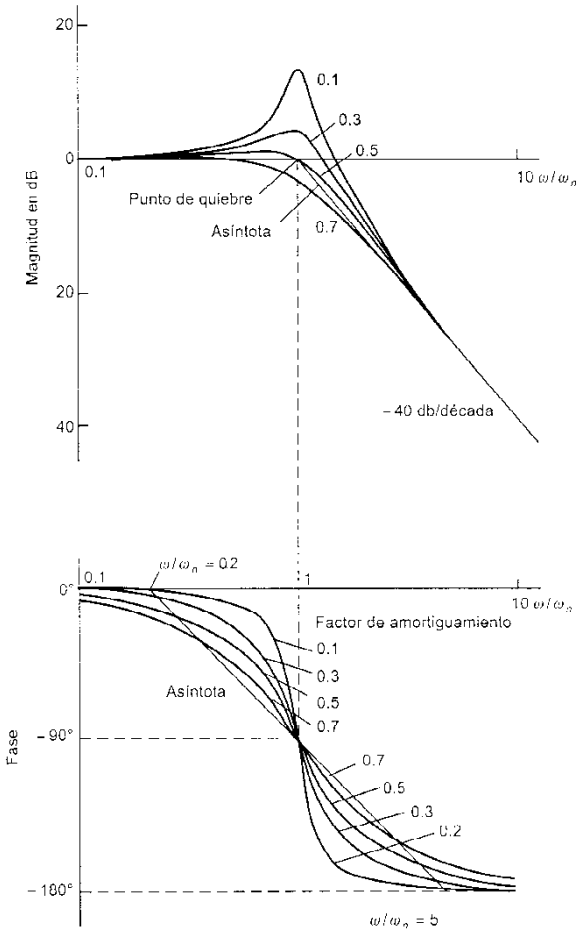


Figura 11.10 Trazas de Bode para un par de polos complejos

Tabla 11.2 Errores asintóticos de la magnitud en dB para pares de polos o ceros complejos

	ω/ω_n						
ζ	0.1	0.2	0.5	1.0	2	5	10
1	− 0.09	− 0.34	− 1.92	− 6.0	− 1.92	− 0.34	− 0.09
0.7	0	− 0.01	− 0.26	− 3.0	− 0.26	− 0.01	0
0.5	+ 0.04	+ 0.17	+ 0.90	0	+ 0.90	+ 0.17	+ 0.04
0.3	+ 0.07	+ 0.29	+ 1.85	+ 4.4	+ 1.85	+ 0.29	+ 0.07

Nota: Valor verdadero = aproximación asintótica + error

Para $(\omega/\omega_n) << 1$, es decir, $(\omega/\omega_n) = 0.2$ o menor, entonces la fase se aproxima a

$$\phi \approx -\tan^{-1} 0 = 0°$$

Para $(\omega/\omega_n) >> 1$, es decir, $(\omega/\omega_n) = 5$ o mayor, entonces la fase se aproxima a

$$\phi \approx -\tan^{-1}(-\infty) = -180°$$

Cuando $\omega = \omega_n$, entonces

$$\phi = -\tan^{-1} \infty = -90°$$

La forma de la traza de fase depende del factor de amortiguamiento relativo; sin embargo, todas las gráficas pasan a través del ángulo de $-90°$ en $\omega = \omega_n$. Se puede dibujar una asíntota que pase por el ángulo de $-90°$ en $\omega = \omega_n$, la cual corte la línea a $0°$ en $(\omega/\omega_n) = 0.2$ y en $-180°$ en $(\omega/\omega_n) = 5$. La tabla 11.3 contiene el error, o diferencia, entre los valores verdaderos y los asintóticos.

Tabla 11.3 Errores asintóticos de la fase para pares de polos o ceros complejos

	ω/ω_n						
ζ	0.1	0.2	0.5	1.0	2	5	10
1	− 11.4°	− 22.6°	+ 1.6°	0	− 1.6°	+ 22.6°	+ 11.4°
0.7	− 8.1°	− 16.4°	+ 19.6°	0	− 19.6°	+ 16.4°	+ 8.1°
0.5	− 5.8°	− 15.3°	+ 29.2°	0	29.2°	+ 15.3°	+ 5.8°
0.3	− 3.5°	− 22.3°	+ 41.1°	0	− 41.1°	+ 22.3°	+ 3.5°

Nota: Valor verdadero = aproximación asintótica + error

Un par de ceros complejos

Esto es donde

$$G(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2} \qquad [36]$$

y de este modo

$$G(j\omega) = \frac{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2}{\omega_n^2}$$

$$G(j\omega) = [1 - (\omega/\omega_n)^2] + j[2\zeta(\omega/\omega_n)] \qquad [37]$$

Por lo tanto, la magnitud en decibeles es

$$|G(j\omega)| = \sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \qquad [38]$$

y la fase es

$$\tan\phi = \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \qquad [39]$$

La magnitud sólo difiere de la obtenida para los polos complejos (ecuación [34]) en que ésta es positiva mientras que para los polos complejos es negativa. De esta manera, la traza de magnitud es sólo la imagen espejo respecto a la línea de 0 dB de la traza dada en la figura 11.10. La fase difiere sólo de la de los polos complejos (ecuación [35]) en que ésta es positiva en tanto que la de los polos complejos es negativa. En consecuencia, la traza de fase es sólo la imagen espejo respecto a la línea de 0° de la traza que ilustra la figura 11.10. Vea la tablas 11.2 y 11.3 para las diferencias entre los valores verdaderos y los asintóticos.

Ejemplo 6

Dibujar los diagramas asintóticos de Bode para un sistema que tiene una función de transferencia de

$$G(s) = \frac{10}{2s+1}$$

Respuesta

La función de transferencia consta de dos componentes: un elemento con función de transferencia 10 y otro con función de transferencia $1/(2s+1)$. Las trazas de Bode se pueden dibujar para cada uno de éstos y sumarlas para dar la traza requerida.

Un sistema con función de transferencia $G(s) = 10$ es un sistema de ganancia constante. De esta manera, la traza será como la de la figura 11.5. La magnitud es una constante, en decibeles, en $20 \log 10 = 20$. La fase constante está en 0°; las trazas se muestran en la figura 11.11.

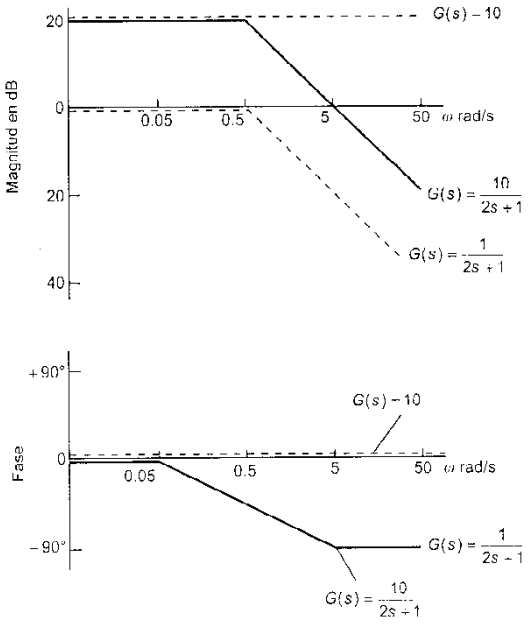


Figura 11.11 Ejemplo 6

Un sistema con función de transferencia $G(s) = 1/(2s+1)$ es uno con un polo real sin ceros. De este modo, el sistema es como el que ilustra la figura 11.8; la constante de tiempo, τ, es igual a 2 s. La traza tendrá un punto de quiebre en $1/\tau = 1/2 = 0.5$ s y las asíntotas serán como muestra la figura 11.11.

Al sumar las trazas da el resultado que describe la figura 11.11.

Ejemplo 7

Dibujar los diagramas asintóticos de Bode para un sistema con función de transferencia de

$$G(s) = \frac{2.5}{s(s^2 + 3s + 25)}$$

Respuesta

La función de transferencia consta de tres componentes: uno con función de transferencia 0.1, otro con $1/s$ y el último con $25/(s^2 + 3s + 25)$.

La función de transferencia $G(s) = 0.1$ es una de ganancia constante y es, por lo tanto, como la que ilustra la figura 11.5. La magnitud es una constante en $20 \log 0.1 = -20 \log_{10} 10 = -20$ dB. La fase constante está en 0°; las trazas se muestran en la figura 11.12.

La función de transferencia $G(s) = 1/s$ describe un sistema que tiene un polo en el origen y es, de esta manera, como la que muestra la figura 11.6. La magnitud tiene una pendiente de −20 dB por década de frecuencia y el valor de 0 dB cuando $\omega = 1$ rad/s. La fase es una constante en −90°; las trazas se muestran en la figura 11.12.

La función de transferencia $G(s) = 25/(s^2 + 3s + 25)$ se puede escribir como $\omega_n^2/(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega_n^2)$ con $\omega_n = 5$ rad/s y $\zeta = 0.3$. De este modo, el sistema es como el que presenta la figura 11.10 para un par de polos complejos. El punto de quiebre es cuando $\omega = \omega_n = 5$ rad/s. La asíntota para el ángulo de fase pasa por −90° en el punto de quiebre; 0° es en $(\omega/\omega_n) = 0.2$, es decir, $\omega = 1$ rad/s y −180° en $(\omega/\omega_n) = 5$, o sea, $\omega = 25$ rad/s; la figura 11.12 muestra las trazas. Al sumar estas tres trazas se obtiene la traza requerida (la figura 11.12).

Ejemplo 8

Dibujar la traza de Bode verdadera para un sistema con función de transferencia de

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 6s + 100}$$

Respuesta

La función de transferencia es de la forma

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

con $\omega_n = 10$ rad/s y $\zeta = 0.3$. Las trazas de Bode serán, así, de la forma que se describe en la figura 11.10.

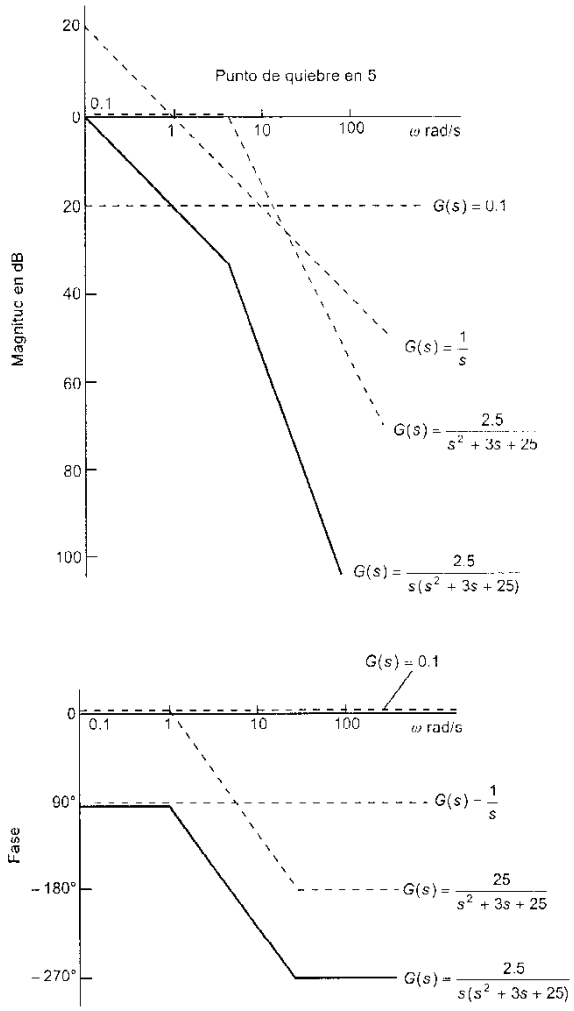
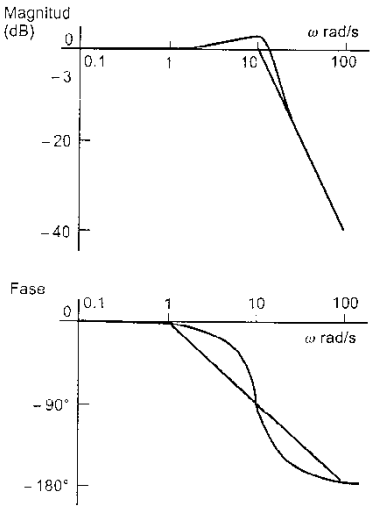


Figura 11.12 Ejemplo 7

Para la traza de magnitud, el punto de quiebre es 10 rad/s, la asíntota antes de esta frecuencia tiene una pendiente de 0 y después de −40 dB por década de frecuencia. Las diferencias entre los valores verdaderos y los asintóticos se pueden encontrar con la tabla 11.2. Para $\zeta = 0.3$ las diferencias en decibeles son:

	ω/ω_n						
ζ	0.1	0.2	0.5	1.0	2	5	10
0.3	+ 0.07	+ 0.29	+ 1.85	+ 4.4	+ 1.85	+ 0.29	+ 0.07

La figura 11.13 muestra las trazas asintótica y verdadera teniendo en cuenta estas diferencias.



Para la traza de fase, la asíntota pasa por $-90°$ en $\omega = 10$ rad/s, y es $0°$ cuando $(\omega/\omega_n) = 0.1$, es decir, $\omega = 1$ rad/s, y es $-180°$ cuando $(\omega/\omega_n) = 10$, o sea, $\omega = 100$ rad/s. La diferencia entre los valores verdaderos y los asintóticos se puede encontrar con base en la tabla 11.3. Para $\zeta = 0.3$ las diferencias son:

	ω/ω_n						
ζ	0.1	0.2	0.5	1.0	2	5	10
0.3	$-3.5°$	$-22.3°$	$+41.1°$	0	$-41.1°$	$-22.3°$	$+3.5°$

La figura 11.13 describe las trazas asintótica y verdadera considerando estas diferencias.

Figura 11.13 Ejemplo 8

Especificaciones de desempeño

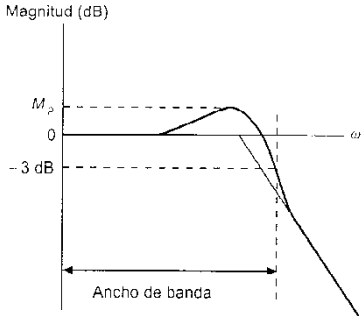


Figura 11.14 Especificaciones de desempeño

Para describir el comportamiento transitorio de un sistema cuando está sujeto a una entrada escalón se usan términos como tiempo de levantamiento, tiempo de asentamiento y sobrepaso (vea el capítulo 3). Cuando el sistema está sujeto a una entrada senoidal los términos que se usan para describir el desempeño del sistema son pico de resonancia y ancho de banda.

El *pico de resonancia*, M_p, se define como el máximo valor de la magnitud (figura 11.14). Para un sistema con valor grande de M_p corresponde un valor grande del máximo sobrepaso. Un sistema de segundo orden se puede relacionar en forma directa con el factor de amortiguamiento relativo mediante la comparación de la respuesta con la traza de Bode de la figura 11.10; un factor de amortiguamiento relativo bajo corresponde a un pico de resonancia alto.

El *ancho de banda* se define como la banda de frecuencias en la cual la magnitud no cae por debajo de -3 dB. Para el sistema dado en la traza de Bode de la figura 11.14 el ancho de banda es el espacio entre la frecuencia cero y la frecuencia en la que la magnitud cae por debajo de -3 dB. Puesto que

$$20 \log G(j\omega) = -3 \qquad [40]$$

o sea, $G(j\omega) = 0.707$ y éste es el valor de corte para la función de respuesta en frecuencia.

Ejemplo 9

Estimar el ancho de banda para el sistema dado por la traza de Bode en la figura 11.13.

Respuesta

La línea de magnitud a -3 dB cruza la traza verdadera alrededor de un cuarto de década después de 10 rad/s. Esto es alrededor de

11.7 rad/s. De esta manera, el ancho de banda es desde 0 rad/s hasta 11.7 rad/s.

Uso de datos experimentales de la respuesta en frecuencia

Los datos de la respuesta en frecuencia para un sistema se pueden obtener en forma experimental mediante una señal senoidal como entrada y monitorear la salida en estado estable a fin de determinar el cociente de la magnitud de la salida entre la magnitud de la entrada (éste es entonces la magnitud) y la diferencia de fase entre la salida y la entrada. La medición se repite para varias frecuencias y, de esta manera, se obtiene la traza de Bode. Al examinar la traza de Bode se puede identificar la función de transferencia del sistema.

Por lo general, la función de transferencia se determina a partir de la traza de magnitud y la traza de fase se usa para verificar los resultados. Sobre los datos experimentales se dibujan las asíntotas. Si la pendiente de la asíntota inicial es -20 dB/década, entonces hay un polo en el origen; si ésta es +20 dB/década hay un cero en el origen. Si la pendiente, al ir de una asíntota a la siguiente, cambia por −20 dB/década, entonces hay un polo real y la función de transferencia incluye un término $1/(\tau s + 1)$, donde la frecuencia en el punto de cambio de la pendiente es $1/\tau$. Si la pendiente cambia en +20 dB/década, entonces hay un cero real y la función de transferencia incluye un $(\tau s + 1)$, donde la frecuencia en el punto de cambio de la pendiente es $1/\tau$. Si la pendiente, al ir de una asíntota a la siguiente, cambia en −40 dB/década hay un par de polos complejos y la función de transferencia incluye un término de la forma

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde ω_n es la frecuencia en el cambio de la pendiente. Al determinar la diferencia entre la traza de magnitud y la asíntota en el punto de quiebre es posible estimar el factor de amortiguamiento relativo ζ, por medio de la tabla 11.2. Si la pendiente, al ir de una asíntota a la siguiente, cambia en + 40 dB/década hay un par de ceros complejos y la función de transferencia incluye un término de la forma

$$\frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$$

donde ω_n es la frecuencia en el cambio de la pendiente. La tabla 11.2 se puede usar para dar un estimado del factor de amortiguamiento relativo, ζ. Todos los elementos que constituyen la función de transferencia se combinan para dar una función de transferencia que tiene una ganancia, K, incluida. La magnitud entonces se calcula a partir de la función de transferencia para algún valor de frecuencia y se compara con el valor experimental para dicho valor; por lo tanto, K se puede determinar (vea el ejemplo 10).

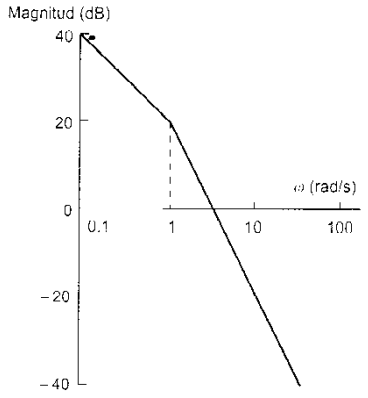


Figura 11.15 Ejemplo 10

Ejemplo 10

Determinar la función de transferencia del sistema dado por el diagrama de Bode que describe en la figura 11.15. Sólo se muestran las asíntotas.

Respuesta

Se tiene una pendiente inicial de −20 dB/década y, de esta manera, hay un término $1/s$. Existe un cambio en la pendiente de −20 dB/década en $\omega = 1$ rad/s y, así, se tiene un término $1/(\tau s + 1)$ con $\tau = 1$ s. No hay otros cambios en la pendiente de manera que la función de transferencia es de la forma

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

donde K es la ganancia. La función de respuesta en frecuencia para el sistema es

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{K(-\omega^2 - j\omega)}{(-\omega^2 + j\omega)(-\omega^2 - j\omega)} = \frac{-K\omega^2 - jK\omega}{\omega^4 + \omega^2}$$

Por lo tanto

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\omega^4 + \omega^2}}$$

La figura 11.15 indica que cuando $20 \log |G(j\omega)| = 20$, entonces $\omega = 1$ rad/s. De esta manera

$$20 \log\left(\frac{K}{\sqrt{1+1}}\right) = 20$$

$$\frac{K}{\sqrt{2}} = 10^1$$

Por lo tanto, $K = 14.1$. De esta manera, la función de transferencia es

$$G(s) = \frac{14.1}{s(s+1)}$$

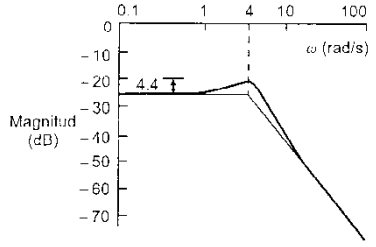


Figura 11.16 Ejemplo 11

Ejemplo 11

Determinar la función de transferencia del sistema dado en el diagrama de Bode que ilustra la figura 11.16.

Respuesta

La pendiente inicial es cero, de modo que no existe un factor $1/s$. Se tiene un cambio en la pendiente de la asíntota de −40 dB/década en una frecuencia de alrededor de 4 rad/s. De esta manera, la función de transferencia incluye el término

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde $\omega_n = 4$ rad/s. El pico es de 4.4 dB por arriba de las asíntotas en el punto de quiebre. La tabla 11.2 indica que éste corresponde a un factor de amortiguamiento relativo de 0.3. Por lo tanto la función de transferencia tiene el término

$$\frac{16}{s^2+2.4s+16}$$

No existen otros cambios en la pendiente y, así, la función de transferencia es de la forma

$$G(s)=\frac{16K}{s^2+2.4s+16}$$

La función de respuesta en frecuencia es, entonces

$$G(j\omega)=\frac{16K}{-\omega^2+j2.4\omega+16}=\frac{16K[(16-\omega^2)-j2.4\omega]}{(16-\omega^2)^2+2.4^2\omega^2}$$

Por lo tanto, la magnitud es

$$|G(j\omega)|=\frac{16K}{\sqrt{(16-\omega^2)^2+2.4^2\omega^2}}$$

Cuando ω tiende a 0, entonces los datos experimentales dan una magnitud de −25 dB. De esta forma

$$20\log(16K/16)=-25$$

$K=0.056$. La función de transferencia es, de esta forma

$$G(s)=\frac{0.9}{s^2+2.4s+16}$$

Diseño mediante compensación

Compensación es el término que describe el ajuste de desempeño de un controlador a fin de que logre un mejor desempeño (vea el capítulo 10). Las trazas de Bode se pueden usar para observar los efectos de los cambios de diseño del compensador respecto a desempeño. Al introducir sólo un elemento proporcional, es decir, un elemento con ganancia constante, la traza de magnitud sólo se desplaza hacia arriba o hacia abajo y no tiene efecto en la traza de fase. Un *compensador de adelanto en cascada* tiene una función de transferencia de la forma (ecuación [25]del capítulo 10)

$$G(s)=\frac{K(s+z)}{(s+p)} \qquad [41]$$

donde $p>z$. Esta ecuación se puede reordenar para obtener

$$G(s)=\frac{K(z/p)(1+s/z)}{(1+s/p)} \qquad [42]$$

Los términos K y (z/p) son términos de ganancia constante, el término $(1+s/z)$ contiene un cero real con constante de tiempo de $1/z$, y el término $(1+s/p)$ contiene un polo real con constante de tiempo de $1/p$. Puesto que $p>z$, entonces $(1/z)>(1/p)$. La traza de Bode es, por consiguiente de la forma que muestra la figura 11.17. Los valores dados son para $K=1$ y para diferentes cocientes de (z/p). Cuando $z=p$ y los términos de los ceros y polos se cancelan para dar $G(s)=1$, entonces la magnitud es una línea recta a lo largo del eje en

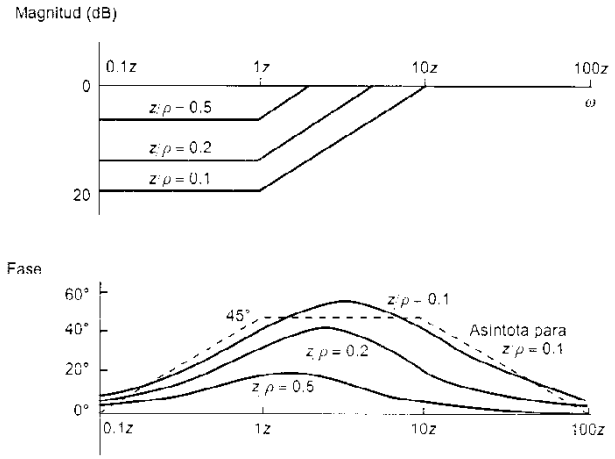


Figura 11.17 Trazas de Bode para un compensador de adelanto

0 dB y la fase, una línea recta a lo largo del eje en 0°. El efecto de introducir un compensador de adelanto es bajar la traza de magnitud en frecuencias bajas y subir el ángulo de fase global, es decir, incrementar el ángulo de fase lo que adelanta la salida respecto a la entrada.

Un *compensador de atraso en cascada* tiene una función de transferencia de la forma (ecuación [24] del capítulo 10)

$$G(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p)} \qquad [43]$$

donde $z > p$. Esta ecuación se puede reordenar para obtener

$$G(s) = \frac{K(z/p)(1+s/z)}{(1+s/p)} \qquad [44]$$

Los términos K y (z/p) son términos de ganancia constante, el término $(1+s/z)$ contiene un cero real con constante de tiempo de $1/z$, y el término $(1+s/p)$ contiene un polo real con constante de tiempo de $1/p$. Puesto que $z > p$, entonces $(1/p) > (1/z)$. La traza de Bode es, así, de la forma que muestra la figura 11.18. Los valores dados son para $K = 1$ y para diferentes cocientes de (z/p). Cuando $z = p$ y los términos de los ceros y polos se cancelan para dar $G(s) = 1$, entonces la magnitud es una línea recta a lo largo del eje en 0 dB y la fase, una línea recta a lo largo del eje en 0°. El efecto de introducir un compensador de atraso es bajar la traza de magnitud en frecuencias altas e incrementar el ángulo de fase, lo que atrasa la salida en relación con la entrada.

Diagramas de Nyquist

Para especificar el comportamiento de un sistema a una entrada senoidal (es decir, especificar la función de respuesta en frecuencia, $G(j\omega)$) en una frecuencia angular particular, ω, se deben establecer

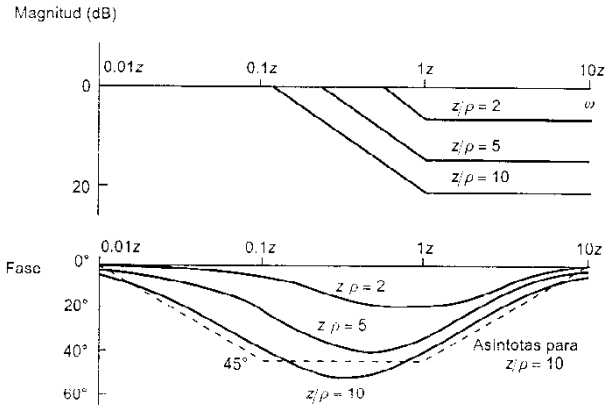


Figura 11.18 Trazas de Bode para un compensador de atraso

tanto la magnitud, $|G(j\omega)|$ como la fase, ϕ. Ambas son funciones de la frecuencia angular. Una forma de mostrar cómo se comporta un sistema sobre un intervalo de frecuencias angulares es trazar los datos de la respuesta para el sistema en un diagrama de Nyquist. El *diagrama de Nyquist* es una traza polar de la respuesta en frecuencia del sistema.

Un número complejo se puede representar mediante $x + jy$, donde x es la parte real y y la parte imaginaria. El número se puede trazar como un punto en un diagrama de Argand, es decir, un diagrama que tiene un eje y el cual representa la parte imaginaria y un eje x, que es la parte real (como en la figura 11.19). La versión polar del número complejo se representa mediante una línea $\sqrt{x^2 + y^2}$ que se dibuja desde el origen forman un ángulo ϕ con el eje real, donde $\tan\phi = y/x$. Ambos métodos terminan en el mismo punto especificado en el diagrama de Argand.

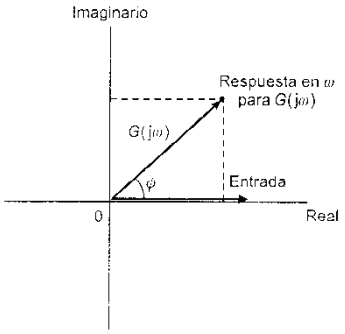


Figura 11.19 Trazado de un punto sobre un diagrama de Nyquist

En el diagrama de Nyquist la salida para una entrada senoidal de amplitud unitaria en una frecuencia angular particular, se especifica mediante el trazo de una línea de longitud igual a la magnitud, $|G(j\omega)|$ en un ángulo de fase, ϕ, con el eje real, como en la figura 11.19. La entrada senoidal al sistema, de este modo, en efecto se representa mediante la línea de magnitud 1 a lo largo del eje real.

Al trazar diagramas de Nyquist existen cuatro puntos clave que se deben representar: el inicio de la traza, donde $\omega = 0$; el fin de la traza, donde $\omega = \infty$; donde la traza cruza al eje real, es decir, $\phi = 0°$ o $\pm 180°$, y donde ésta cruza al eje imaginario, o sea, $\phi = \pm 90°$. Para un *sistema de primer orden*, o un sistema de atraso sencillo, la función de transferencia es de la forma

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \qquad [45]$$

donde τ es la constante de tiempo. De esta manera, la función de respuesta en frecuencia $G(j\omega)$, es

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \qquad [46]$$

Así, debido a que la magnitud $|G(j\omega)|$ es la raíz cuadrada de la parte real al cuadrado más la parte imaginaria al cuadrado (ecuación [5]), entonces

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{(1+\omega^2\tau^2)^2} + \frac{\omega^2\tau^2}{(1+\omega^2\tau^2)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \qquad [47]$$

La fase, ϕ, está dada por el cociente de la parte imaginaria entre la parte real (ecuación [6])

$$\tan\phi = \frac{-\omega\tau/(1+\omega^2\tau^2)}{1/(1+\omega^2\tau^2)}$$

$$\phi = -\tan^{-1}\omega\tau \qquad [48]$$

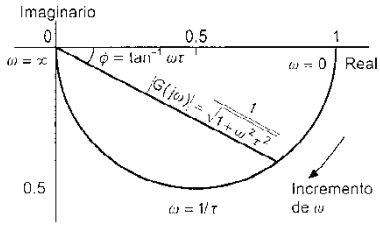


Figura 11.20 Trazado de Nyquist para $G(s) = 1/(1+\tau s)$

Cuando $\omega = 0$, entonces las ecuaciones [47] y [48] dan como resultado $|G(j\omega)| = 1$ y $\phi = 0°$. Éste es también el punto en el que la traza cruza el eje real. Cuando ω tiende a ∞, entonces $|G(j\omega)|$ tiende a 0 y ϕ a $-90°$. Éste es también el punto en el que la traza cruza el eje imaginario. También se pueden calcular otros puntos para ayudar a dibujar la traza de Nyquist. Así, por ejemplo, cuando $\omega = 1/\tau$, entonces $|G(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$ y $\phi = -\tan^{-1}1 = -45°$. La figura 11.20 muestra la traza de Nyquist, la cual es un semicírculo.

Considere ahora *un sistema de segundo orden* con una función de transferencia dada por

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad [49]$$

La función de respuesta en frecuencia $G(j\omega)$, es de esta forma

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\xi\omega\omega_n + \omega_n^2} = \frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2 + j2\xi(\omega/\omega_n)}$$

$$G(j\omega) = \frac{[1-(\omega/\omega_n)^2] - j[2\xi(\omega/\omega_n)]}{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega/\omega_n)]^2} \qquad [50]$$

y por ello, la magnitud es

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega/\omega_n)]^2}} \qquad [51]$$

y la fase está dada por

$$\tan\phi = -\frac{2\xi(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

$$\phi = -\tan^{-1}\left[\frac{2\xi(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right] \qquad [52]$$

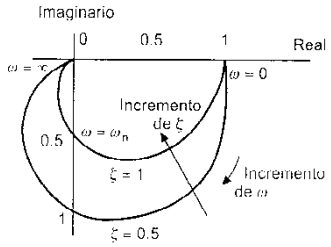


Figura 11.21 Trazado de Nyquist para $G(s) = \omega_n^2/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$

Cuando $\omega - 0$, entonces $|G(j\omega)| = 1$ y $\phi = 0°$. Cuando $\omega = \infty$, entonces $|G(j\omega)| = 0$ y $\phi = -\tan^{-1}(0/-\infty) = -180°$. Éstos son los puntos en los que la traza cruza el eje real. Cuando $\omega = \omega_n$, entonces $|G(j\omega)| = 1/2$ y $\phi = -\tan^{-1}(2\zeta/0) - -90°$. Éste es el punto en el que la traza cruza el eje imaginario. La figura 11.21 muestra las familias de las trazas de Nyquist producidas para diferentes factores de amortiguamiento relativo.

La figura 11.22 muestra ejemplos adicionales de diagramas de Nyquist y sus diagramas asociados de lugar geométrico de las raíces.

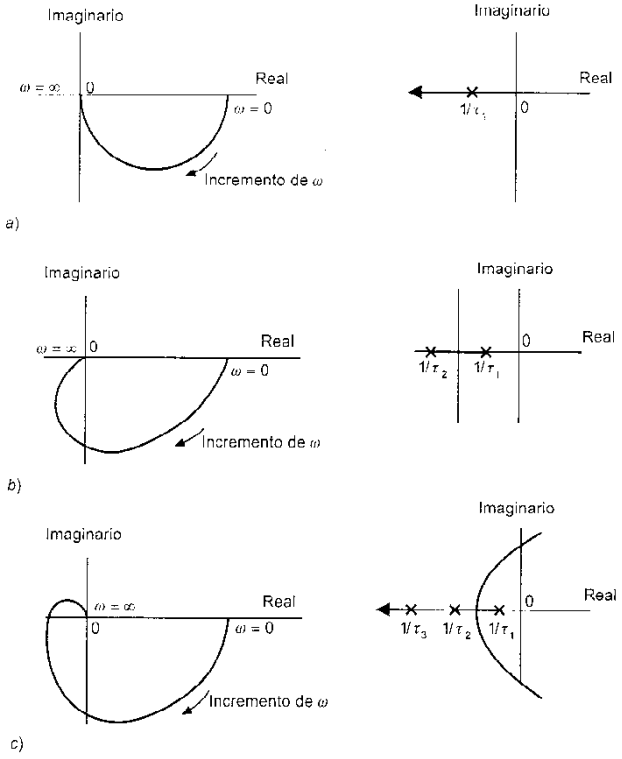


Figura 11.22 Diagramas de Nyquist y sus diagramas de lugar geométrico de las raíces asociados:
a) $G(s) = 1/(\tau_1 s + 1)$,
b) $G(s) = 1/(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)$,
c) $G(s) = 1/(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)$,
d) $G(s) = 1/s(\tau_1 s + 1)$,
e) $G(s) = 1/s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)$,
f) $G(s) = (\tau s + 1)/s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)$

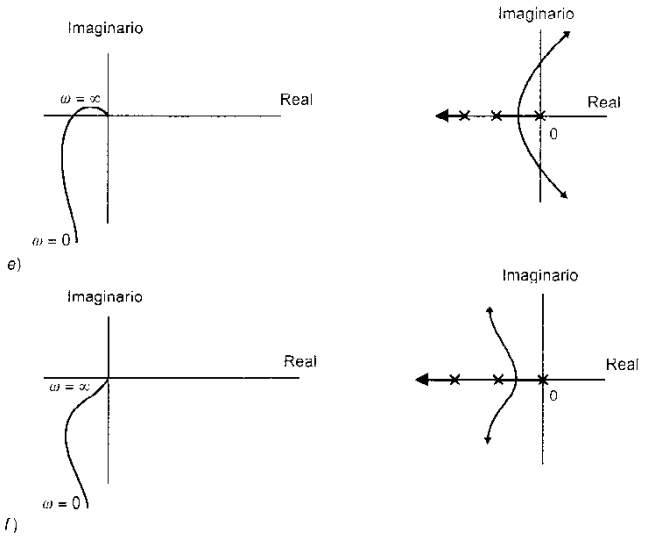


Figura 11.22 Continuación

Ejemplo 12

Trazar el diagrama de Nyquist para un sistema que tiene una función de transferencia de

$$G(s) = \frac{1}{(2s+1)(s^2+s+1)}$$

Respuesta

La función de respuesta en frecuencia $G(j\omega)$, es

$$G(j\omega) = \frac{1}{(2j\omega+1)(-\omega^2+j\omega+1)} = \frac{1}{(1-3\omega^2)+j(3\omega-2\omega^3)}$$

$$= \frac{(1-3\omega^2)-j(3\omega-2\omega^3)}{(1-3\omega^2)^2+(3\omega-2\omega^3)^2}$$

De esta manera, la magnitud es

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[(1-3\omega^2)^2+(3\omega-2\omega^3)^2]}}$$

y la fase es

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{3\omega-2\omega^3}{1-3\omega^2}\right)$$

Cuando $\omega = 0$, entonces $|G(j\omega)| = 1$ y $\phi = -\tan^{-1} 0 - 0°$. Cuando $\omega = \infty$ entonces $|G(j\omega)| = 0$ y

$$\phi = -\tan^{-1}\left[\frac{3}{(1/\omega)-3\omega} - \frac{2}{(1/\omega^3)-(3/\omega)}\right]$$

$$= -\tan^{-1}(-\infty) = 90°$$

Los puntos de cruce con el eje real están dados por $\phi = 0°$ o $\pm 180°$. El punto de 0° está dado por $\omega - 0$, como antes se indicó. Para $\phi = -180°$, $\tan \phi = -0$ y así, se debe tener que

$$3\omega - 2\omega^3 = 0$$

Esto significa que $\omega = 0$ o $\sqrt{(3/2)} = 1.2$ rad/s. Con este valor de frecuencia la magnitud tiene un valor de

$$\frac{1}{\sqrt{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega - 2\omega^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{[1-3(3/2)]^2 + 0}}$$

o -0.3. Los puntos de cruce con el eje imaginario están dados por $\phi = \pm 90°$. La $\omega = +\infty$ da el punto de +90°, como ya se indicó. Para $\phi = -90°$, $\tan \phi = -\infty$ y, de este modo, se debe tener que

$$1 - 3\omega^2 = 0$$

Esto significa que $\omega = 1/\sqrt{3} = 0.6$ rad/s. Con este valor de frecuencia la magnitud tiene un valor de

$$\frac{1}{\sqrt{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega - 2\omega^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0 + (\sqrt{3} - 2/3\sqrt{3})^2}}$$

o -0.7. Para ayudar a trazar el diagrama de Nyquist se pueden obtener otros valores. Así, para $\omega = 1$ rad/s, $|G(j\omega)| = 0.4$ y $\phi = -153°$; para $\omega = 0.5$ rad/s, $|G(j\omega)| = 0.8$ y $\phi = 68°$; para $\omega = 0.2$ rad/s, $|G(j\omega)| = 0.95$ y $\phi = 34°$. La figura 11.23 muestra la traza de Nyquist resultante.

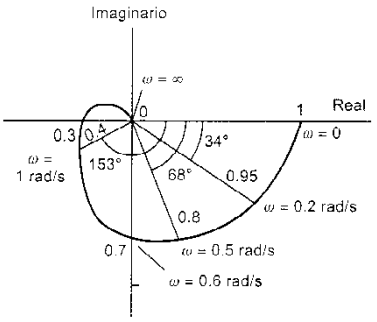


Figura 11.23 Ejemplo 12

Criterio de estabilidad de Nyquist

Cuando a un sistema se aplica una entrada senoidal la salida de ese sistema es senoidal con la misma frecuencia angular, pero puede tener una amplitud que difiere de la de la entrada y mostrar una diferencia de fase. El cociente de las amplitudes de salida y de entrada es la magnitud, $|G(j\omega)|$. Para que la inestabilidad se presente cuando la entrada al sistema es senoidal, la magnitud en lazo abierto debe ser mayor que 1 si el atraso de fase en lazo abierto es 180°. Si el sistema causa un cambio de fase de 180°, entonces la señal de realimentación estará en fase con la señal de entrada y, de esta manera, se adicionará a ésta en vez de sustraerse. Si la amplitud es menor que la de la señal de entrada, se puede alcanzar una condición estable, pero si la amplitud es mayor, la señal a través del sistema crecerá de manera continua. Si el sistema en lazo abierto es estable, el sistema en lazo cerrado también será estable.

La figura 11.24 muestra la implicación de este criterio de estabilidad en relación al diagrama de Nyquist para un sistema en lazo abierto. Un ángulo de fase de 180° significa que la magnitud apunta hacia la parte negativa del eje real. Si la magnitud en este valor de fase no debe exceder a 1, entonces la traza polar no debe encerrar al punto -1 sobre el eje real si el sistema va a ser estable.

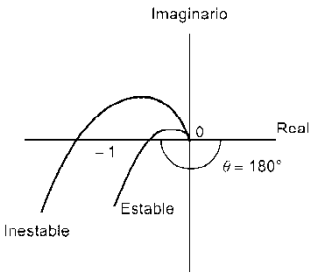


Figura 11.24 Trazas de Nyquist estable e inestable

Ejemplo 13

¿Cuál es la condición para que un sistema con la siguiente función de transferencia en lazo abierto sea estable?

$$G_0(s) = \frac{K}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

Respuesta

La función de respuesta en frecuencia es

$$\begin{aligned} G_0(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1)} \\ &= \frac{K}{j\omega(-\omega^2\tau_1\tau_2 + 1) - \omega^2(\tau_1 + \tau_2)} \\ &= \frac{-jK\omega(-\omega^2\tau_1\tau_2 + 1) - K\omega^2(\tau_1 + \tau_2)}{\omega^2(-\omega^2\tau_1\tau_2 + 1)^2 - \omega^4(\tau_1 + \tau_2)^2} \end{aligned}$$

La magnitud es, de este modo

$$|G_0(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\omega^4(\tau_1 + \tau_2)^2 + \omega^2(1 - \omega^2\tau_1\tau_2)^2}}$$

y la fase

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{1 - \omega^2\tau_1\tau_2}{\omega(\tau_1 + \tau_2)}\right]$$

Para lograr estabilidad la magnitud no debe exceder 1 cuando la fase es 180°. De este modo, la condición limitante para la fase es $\phi = \tan^{-1} 0$. Por lo tanto

$$1 - \omega^2\tau_1\tau_2 = 0$$

y así, $\omega = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$. Al sustituir este valor de ω en la ecuación de la magnitud se obtiene

$$|G_0(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1/\tau_1\tau_2)^2(\tau_1 + \tau_2)^2 + (1/\tau_1\tau_2)(1-1)^2}}$$

Si el sistema va a ser estable, entonces

$$\frac{K}{(1/\tau_1\tau_2)(\tau_1 + \tau_2)} < 1$$

$$K < \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2}$$

La traza de Nyquist es de la forma que se muestra en la figura 11.22 *e*.

Margen de ganancia y margen de fase

El *margen de ganancia* se define como el factor mediante el cual la ganancia del sistema, es decir, la magnitud, se puede incrementar antes de que se presente la inestabilidad. Éste es, entonces, la cantidad mediante la cual la magnitud en 180° debe incrementarse para alcanzar el valor crítico de 1 (figura 11.25).

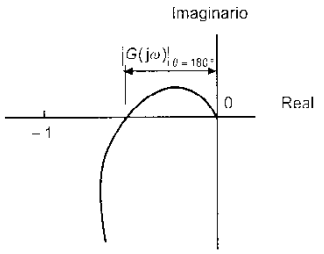


Figura 11.25 Margen de ganancia

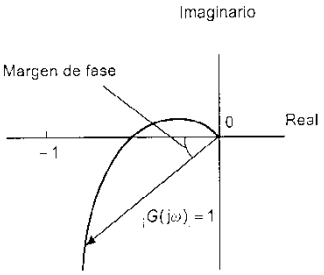


Figura 11.26 Margen de fase

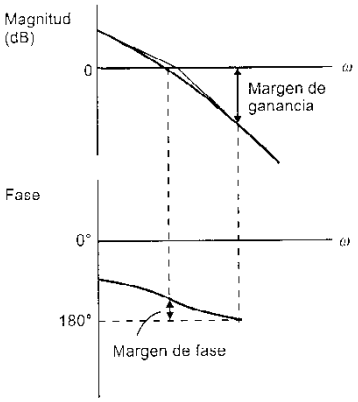


Figura 11.27 Márgenes de ganancia y fase con las trazas de Bode

$$1 = \text{Margen de ganancia} \times |G(j\omega)|_{\phi=180°} \qquad [53]$$

Éste en general se cuantifica en decibeles y de esta forma en decibeles es

$$\text{Margen de ganancia} = 20 \log 1 - 20 \log |G(j\omega)|_{\phi=180°}$$

$$\text{Margen de ganancia} = -20 \log |G(j\omega)|_{\phi=180°} \qquad [54]$$

Si la traza de Nyquist jamás cruza la parte negativa del eje real, el margen de ganancia es infinito. Si la traza pasa a través del eje en un valor menor que 1, el margen de ganancia es positivo. Si pasa a través del eje en 1, el margen de ganancia es cero y si pasa a través del eje en un valor mayor que 1, es decir, la traza encierra el punto −1, el margen de ganancia es negativo.

El *margen de fase* se define como el ángulo a través del cual la traza de Nyquist debe girar para que el punto de magnitud unitaria pase a través del punto −1 en el eje real (figura 11.26).Esta es, por lo tanto, la cantidad mediante la cual la fase del sistema en lazo abierto cae cerca de 180° cuando su magnitud tiene un valor de 1, es decir, la amplitud de la salida es la misma que la de la entrada.

La figura 11.27 muestra los márgenes de ganancia y fase en las trazas de Bode para un sistema.

Ejemplo 14

Determinar el valor de K para un sistema con la siguiente función de transferencia en lazo abierto

$$G_o(s) = \frac{K}{s(2s+1)(s+1)}$$

el cual dará *a*) un sistema marginalmente estable, *b*) un margen de ganancia de 3 dB.

Respuesta

La función de respuesta en frecuencia en lazo abierto es

$$G_o(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j2\omega+1)(j\omega+1)} = \frac{K}{-3\omega^2 + j\omega(1-2\omega^2)}$$

$$= \frac{-3K\omega^2 - jK\omega(1-2\omega^2)}{9\omega^4 + \omega^2(1-2\omega^2)^2}$$

La magnitud es, entonces

$$|G_o(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{9\omega^4 + \omega^2(1-2\omega^2)^2}}$$

y la fase

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1-2\omega^2}{3\omega}\right)$$

a) Para que el sistema sea marginalmente estable la magnitud debe tener el valor de 1, cuando $\phi = 180°$. Para $\phi = 180°$ entonces $\phi = \tan^{-1} 0$ y, de esta manera

$$1 - 2\omega^2 = 0$$

Por lo tanto, $\omega = 1/\sqrt{2}$ rad/s. Al sustituir este valor en la ecuación de la magnitud, con la magnitud igual a 1, se obtiene

$$1 = \frac{K}{\sqrt{9/4 + 0}}$$

y, así, $K = 1.5$.

b) Para que el sistema tenga un margen de ganancia de 3 dB, según la ecuación [54]

$$\text{Margen de ganancia} = -20 \log \left| G(j\omega) \right|_{\phi = 180°}$$

$$3 = -20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{9/4 + 0}} \right)$$

y así, $K = 1.06$.

Ejemplo 15

¿Cuál es el margen de fase para un sistema que tiene la siguiente función de transferencia en lazo abierto?

$$G_o(s) = \frac{9}{s(s+3)}$$

Respuesta

La función de respuesta en frecuencia es

$$G_o(j\omega) = \frac{9}{-\omega^2 + j3\omega} = \frac{-9\omega^2 - j27\omega}{\omega^4 + 9\omega^2}$$

Por lo tanto, la magnitud es

$$\left| G_o(j\omega) \right| = \frac{9}{\sqrt{\omega^4 + 9\omega^2}}$$

y la fase

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{\omega} \right)$$

El margen de fase es el ángulo de fase más corto a partir de 180° cuando la magnitud es 1. Así,

$$1 = \frac{9}{\sqrt{\omega^4 + 9\omega^2}}$$

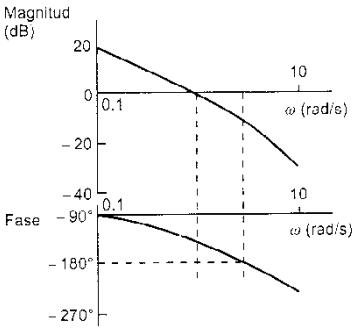
$$\omega^4 + 9\omega^2 - 81 = 0$$

Si se usa la expresión para las raíces de una ecuación cuadrática y considerando ω^2 como la raíz, entonces

$$\omega^2 = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 324}}{2}$$

y puesto que sólo interesan los valores positivos de ω, se tiene que $\omega = 2.36$ rad/s. El ángulo de fase para esta magnitud es, por lo tanto

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2.36} \right) = 51.8°$$



Puesto que tanto la parte real como la imaginaria de $G_o(j\omega)$ son negativas, este ángulo es el relativo a $-180°$ y, de esta forma, es el margen de fase.

Ejemplo 16

Para las trazas de Bode de la figura 11.28 estimar el margen de ganancia y el margen de fase.

Respuesta

El margen de ganancia es el valor de la magnitud cuando la fase es $-180°$ y, de esta forma, es de alrededor de 8 dB. El margen de fase es la diferencia de fase desde $-180°$ cuando la magnitud es cero. Éste es de casi 40°.

Figura 11.28 Ejemplo 16

Problemas

1 ¿Cuáles son las magnitudes y las fases de los sistemas que tienen las siguientes funciones de transferencia?

a) $\dfrac{5}{s+2}$

b) $\dfrac{2}{s(s+1)}$

c) $\dfrac{1}{(2s+1)(s^2+s+1)}$

2 ¿Cuál será la respuesta en estado estable de un sistema con función de transferencia

$$\frac{1}{s+2}$$

cuando está sujeta a la entrada?

$$\theta_i = 3\,\text{sen}\,(5t+30°)$$

3 ¿Cuál será la respuesta en estado estable de un sistema con función de transferencia

$$\frac{5}{s^2+3s+10}$$

cuando está sujeta a la entrada?

$$\theta_i = 2\,\text{sen}\,(2t+70°)$$

4 ¿Cuáles son la magnitud y la fase para un sistema dado por la función de transferencia?

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$$

5 Para los sistemas con las siguientes funciones de transferencia dar los valores de la magnitud y la fase en las frecuencias angulares de *i)* 0 rad/s, *ii)* 1 rad/s, *iii)* 2 rad/s, *iv)* ∞ rad/s.

a) $G(s) = \dfrac{1}{s(2s+1)}$

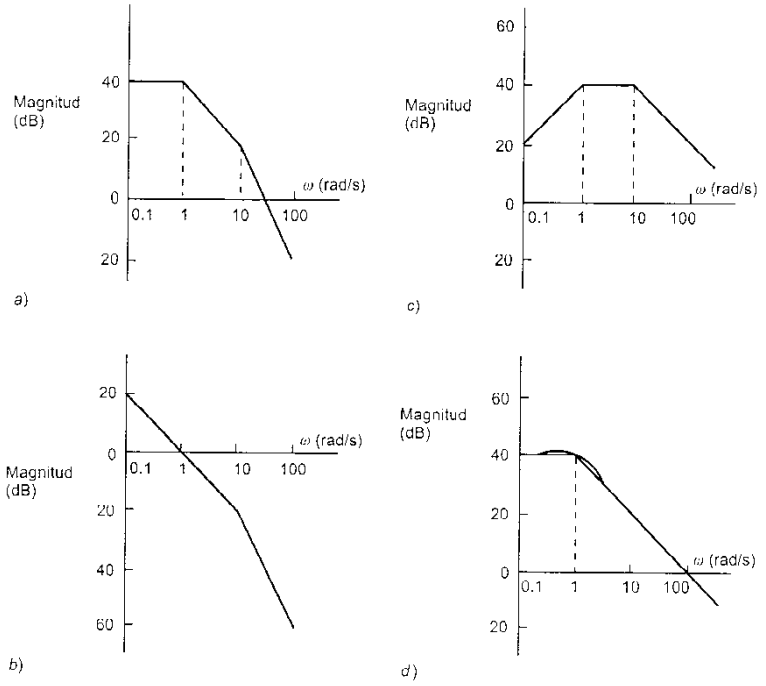


Figura 11.29 Problema 7

b) $G(s) = \dfrac{1}{3s+1}$

6 Dibujar las trazas asintóticas de Bode para los sistemas que tiene las funciones de transferencia

a) $G(s) = \dfrac{10}{s(0.1s+1)}$

b) $G(s) = \dfrac{1}{(2s+1)(0.5s+1)}$

c) $G(s) = \dfrac{5}{(2s+1)(s^2+3s+25)}$

d) $G(s) = \dfrac{(s+1)}{(s+2)(s+3)}$

7 Determinar las funciones de transferencia de las trazas asintóticas de Bode en magnitud que muestra la figura 11.29.

8 Trazar el diagrama de Nyquist para el sistema dado por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

9 Determinar la condición de estabilidad para los sistemas con las siguientes funciones de transferencia en lazo abierto

a) $G_o(s) = \dfrac{K}{s^2(\tau s + 1)}$

b) $G_o(s) = \dfrac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)}$

c) $G_o(s) = \dfrac{K}{s(\tau s + 1)}$

10 Determinar el valor de K para un sistema con la siguiente función de transferencia en lazo abierto

$$G_o(s) = \frac{K}{s(2s+1)(3s+1)}$$

la cual dará *a)* un sistema marginalmente estable, *b)* un margen de ganancia de 2 dB.

11 ¿Cuál es el margen de fase para un sistema que tiene la función de transferencia en lazo abierto?

$$G_o(s) = \frac{2}{s(s+1)}$$

12 Para las trazas de Bode de la figura 11.30 estimar el margen de ganancia y el margen de fase.

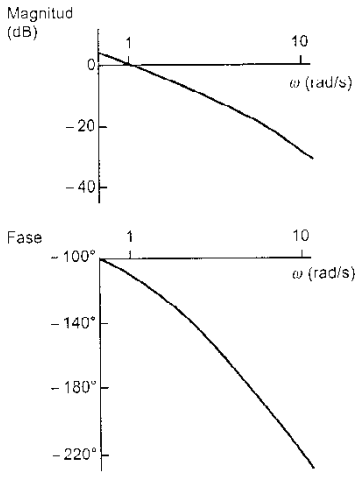


Figura 11.30 Problema 12

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE LERDO BIBLIOTECA

12 Equipo básico de un sistema de control

Introducción

Este capítulo proporciona ejemplos de algunos elementos de medición y corrección más comunes que se usan en sistemas de control y considera su utilización en ejemplos de sistemas de control. Los elementos de medición que se mencionan son los relacionados con el sensado de desplazamiento lineal, desplazamiento angular, esfuerzo, presión, temperatura y flujo de fluidos; los elementos de corrección, a su vez, son relevadores, válvulas de control y motores.

Elementos de medición

Algunos de los elementos de medición más comunes en sistemas de control son los siguientes.

Potenciómetro

Un potenciómetro con una pista de resistencia uniforme produce una señal de voltaje proporcional al desplazamiento del contacto deslizante desde un extremo de la pista de resistencia del potenciómetro (figura 12.1). Por lo tanto:

$$\text{Salida en volts} = K \times \text{posición de entrada} \qquad [1]$$

donde K es la sensibilidad del potenciómetro en volts por radián.

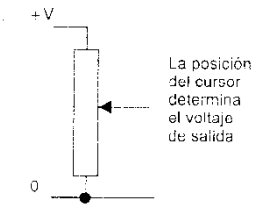


Figura 12.1 Potenciómetro

Un par de potenciómetros se pueden usar (figura 12.2*a*) como un detector de error: uno convierte el desplazamiento de entrada en un voltaje y el otro, el desplazamiento real también en un voltaje; los dos se conectan de manera que se obtenga la diferencia entre estos voltajes. La figura 12.2*b* representa dicho sensor de error en un diagrama de bloques del sistema de control.

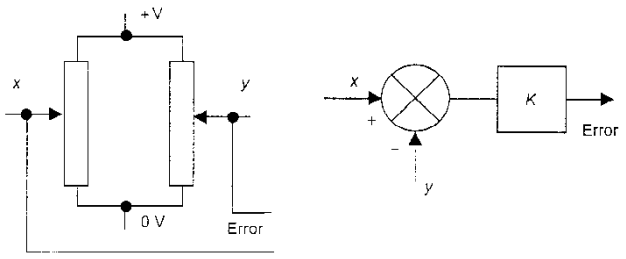


Figura 12.2 Sensor de error a) b)

Con un par de potenciómetros giratorios, donde el cursor de uno se fija mediante la posición angular, x, en radianes del eje de referencia y el otro mediante la posición angular, y, en radianes del eje de salida, la señal de voltaje de error, v_e, en volts es:

$$v_e = K(x - y) \qquad [2]$$

Transformador diferencial de variación lineal

El transformador diferencial de variación lineal (LVDT por sus siglas en inglés: *linear variable differential transformer*) es otro ejemplo de un detector de posición. Este proporciona una salida de voltaje alterna que tiene una amplitud relacionada con la posición de un núcleo ferroso. La figura 12.3 muestra el principio básico.

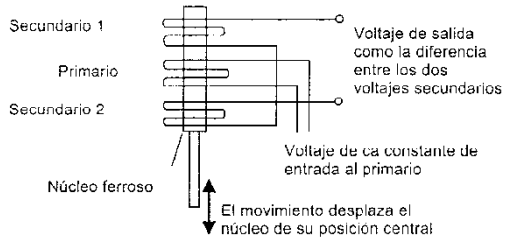

Secundario 1
Primario
Secundario 2
Núcleo ferroso
Voltaje de salida como la diferencia entre los dos voltajes secundarios
Voltaje de ca constante de entrada al primario
El movimiento desplaza el núcleo de su posición central

Figura 12.3 LVDT

Cuando al devanado primario se aplica una corriente alterna, se inducen voltajes de alterna en cada uno de los devanados secundarios. Cuando el núcleo ferroso se centra entre los dos devanados, en cada uno de ellos se tiene una cantidad igual del núcleo; así, los voltajes inducidos en cada devanado son los mismos. Los voltajes de salida de los dos devanados están conectados de tal manera que la salida combinada es la diferencia entre ellos (figura 12.4*a*).

De esta forma, cuando el núcleo está en el centro no hay salida, y cuando se desplaza hay una mayor cantidad de él en un devanado que en el otro; así, los dos voltajes inducidos difieren y hay una salida (figura 12.4*b*). A fin de que no se produzca una misma salida para desplazamientos diferentes, se usa un demodulador con filtro pasabajas sensible a la fase que proporcione un valor único para cada desplazamiento (figura 12.4*c*).

La función de transferencia se puede obtener al aplicar las leyes de Kirchhoff a los circuitos y es de la forma:

$$G(s) = \frac{[(M_1 - M_2) / R_p]s}{\tau s + 1}$$

donde M_1 y M_2 son las inductancias mutuas de los dos devanados; $M_1 - M_2$ es la cantidad que varía en forma razonablemente lineal con el desplazamiento del núcleo; R_p, la resistencia del circuito primario, y τ, el cociente de la inductancia del primario entre su resistencia.

Los LVDT se usan ampliamente en sistemas de control donde se deben monitorear desplazamientos que están en el rango desde ±025 mm hasta ±250 mm. Dichas aplicaciones se presentan en procesos en los que se debe controlar el espesor de las hojas de producto.

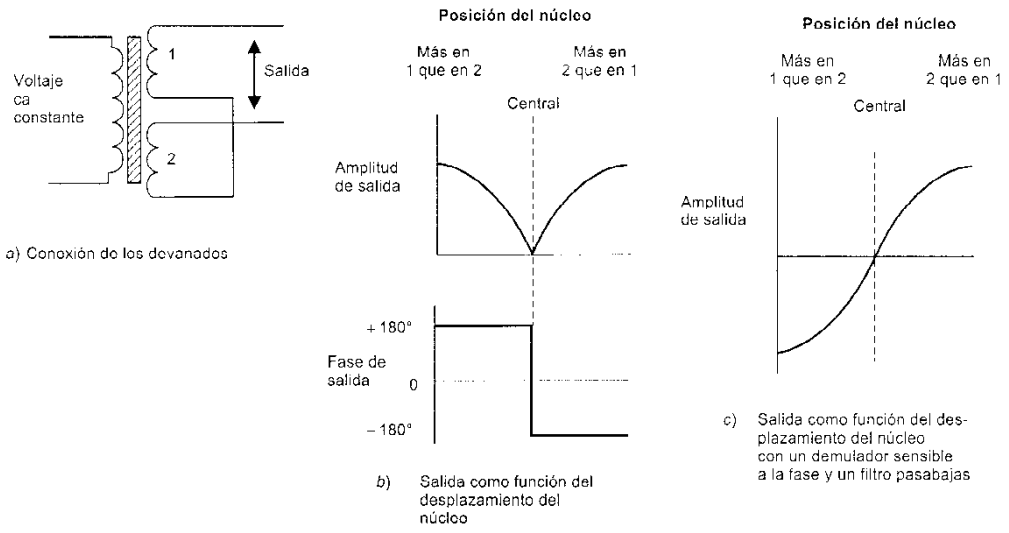


Figura 12.4 Salida de un LVDT

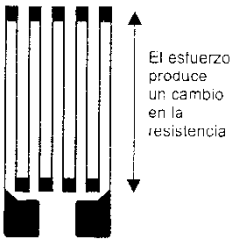


Figura 12.5 Galga extensométrica de hoja de metal

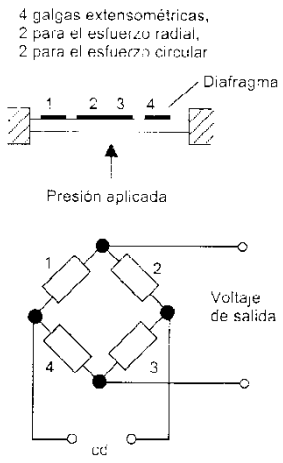


Figura 12.6 Celda de presión

Extensómetro (galga extensométrica) de resistencia eléctrica

La figura 12.5 muestra una forma común de galga extensométrica de hoja de metal. Cuando se estira un alambre metálico o una tira de semiconductor su resistencia cambia. El cambio fraccional en la resistencia es proporcional al cambio fraccional en la longitud, es decir, el esfuerzo. De esta manera:

$$\frac{\Delta R}{R} = G \times \text{esfuerzo} \qquad [3]$$

donde G es una constante denominada factor de galga. Para metales el factor de galga es de alrededor de 2 y para semiconductores de aproximadamente 100. Las galgas extensométricas en general se usan en puentes de Wheatstone, donde el voltaje de desbalance es una medida del cambio de resistencia. Dichos puentes también permiten compensar la temperatura en la resistencia de la galga extensométrica, la cual también cambia con la temperatura. Sin embargo, si las galgas extensométricas se colocan en las ramas opuestas al puente, ambas expuestas a los mismos cambios en temperatura, los cambios en la resistencia que producen los cambios de temperatura se cancelan y no producen ningún desbalance de voltaje. La figura 12.6 ilustra cómo usar dicho arreglo con galgas extensométricas para monitorear la deformación de un diafragma sujeto a cambios de presión. Desarrollos actuales de dichos medidores de presión tienen forma de diafragmas circulares de silicio con las galgas extensométricas como áreas del diafragma especialmente dopadas.

Tacómetro

Los tacómetros son sensores que producen una salida eléctrica en relación con la velocidad a la que se gira. Existen dos tipos principales: los tacómetros de cd y los tacómetros de ca.

El *tacómetro de cd* es en esencia un generador de cd con un magneto permanente que produce un campo magnético en el que puede girar un devanado (figura 12.7*a*). Cuando el devanado gira, se induce una fuerza electromotriz (f.e.m.) alterna en el devanado: mientras más rápido gira el devanado, mayor será la magnitud de la f.e.m. alterna. Los anillos deslizantes se usan para obtener una salida de cd proporcional a la velocidad angular.

El tacómetro de ca es un cilindro giratorio y dos devanados en ángulos rectos (figura 12.7*b*). Al aplicar una corriente alterna a uno de los devanados, entonces el otro produce una salida proporcional a la velocidad de rotación del cilindro.

El voltaje de salida de un tacómetro es proporcional a la razón de cambio en la posición angular θ del eje del medidor, por lo tanto, se obtiene por:

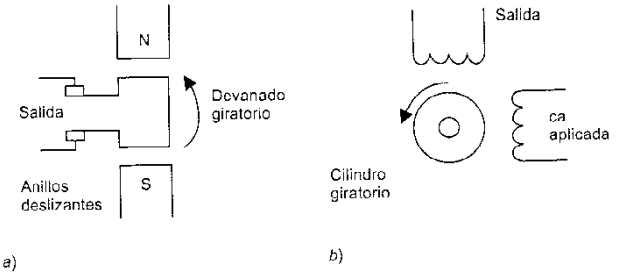


Figura 12.7 Tacómetros: *a*) cd y *b*) ca

$$\text{Voltaje de salida } v = K\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = K\omega \qquad [4]$$

donde K es una constante y ω, la velocidad angular. De esta forma, la función de transferencia es

$$G(s) = \frac{V(s)}{\theta(s)} = Ks \qquad [5]$$

Codificador

El término *codificador* se usa para un dispositivo que proporciona una salida digital como resultado de un desplazamiento angular o lineal; un *codificador incremental* detecta los cambios en el desplazamiento angular o lineal de algún dato de posición y un *codificador absoluto* proporciona la posición angular o lineal real. La figura 12.8 ilustra la forma básica de un codificador incremental que podría usarse para medir el desplazamiento angular. En un disco se hace incidir un haz luminoso proveniente de un diodo emisor de luz (LED por sus siglas en inglés: *light emitting diode*), que es capaz de pasar a través de las ranuras del disco para detectarlo mediante un sensor luminoso, por ejemplo, un fotodiodo o un fototransistor. Cuando el disco gira, el haz de luz se transmite en forma intermitente. De esta manera proporciona una salida en forma de pulsos a partir del sensor luminoso.

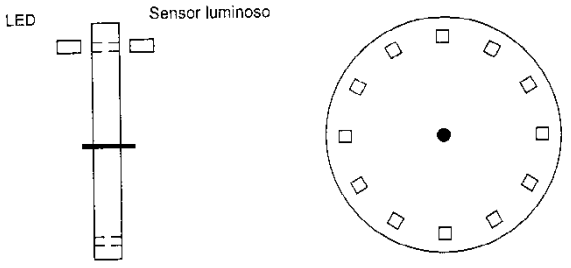


Figura 12.8 Codificador incremental

El número de pulsos es proporcional al ángulo por el que gira el disco. La resolución es proporcional al número de ranuras del disco. Por ejemplo, con 60 ranuras alrededor del disco el movimiento de una ranura a otra es un giro de 6°. Con el uso de ranuras de compensación es posible tener más de mil ranuras para una sola revolución.

El codificador absoluto difiere del codificador incremental en que tiene un patrón de ranuras que sólo define cada posición angular mediante un patrón de señales de encendido-apagado producidas. A manera de ejemplo, la figura 12.9 describe la forma de dicho codificador con tres conjuntos de ranuras; los codificadores por lo común tienen hasta 10 o 12 pistas. El número de bits en la salida binaria resultante es igual al número de pistas. Con 3 pistas habrá 3 bits, de manera que el número de posiciones que se pueden detectar será $2^3 = 8$, es decir, una resolución de $360°/8 = 45°$. Con 10 pistas se tendrán 10 bits y el número de posiciones que se pueden detectar será $2^{10} = 1024$ con una resolución angular de $360°/1024 = 0.35°$.

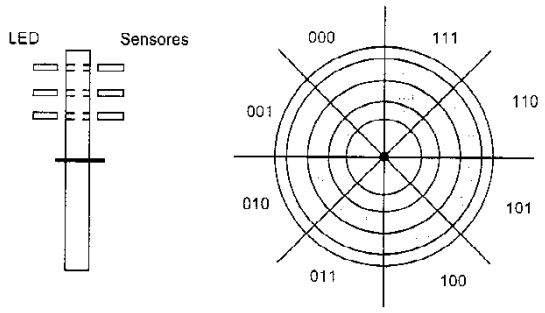


Figura 12.9 Codificador absoluto de 3-bits

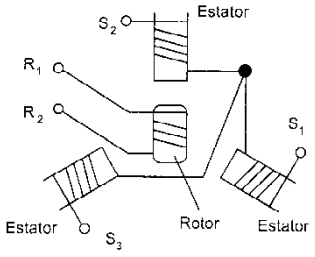


Figura 12.10 Elemento sincro

Sincros

El sincro es un pequeño transformador giratorio de una sola fase que convierte el desplazamiento angular en voltaje de ca, o voltaje de ca en desplazamiento angular. La figura 12.10 ilustra el principio básico de un elemento sincro. Éste consta de tres devanados de estator espaciados 120° alrededor de un estator cilíndrico, y un devanado de rotor concéntrico interior que gira en forma libre entre estos devanados de estator. Una corriente alterna de entrada al devanado de rotor induce salidas en cada devanado secundario. Las salidas de cada uno de los tres devanados de estator dependerán de la posición angular del rotor, por lo tanto, éstos son una medida de la posición angular.

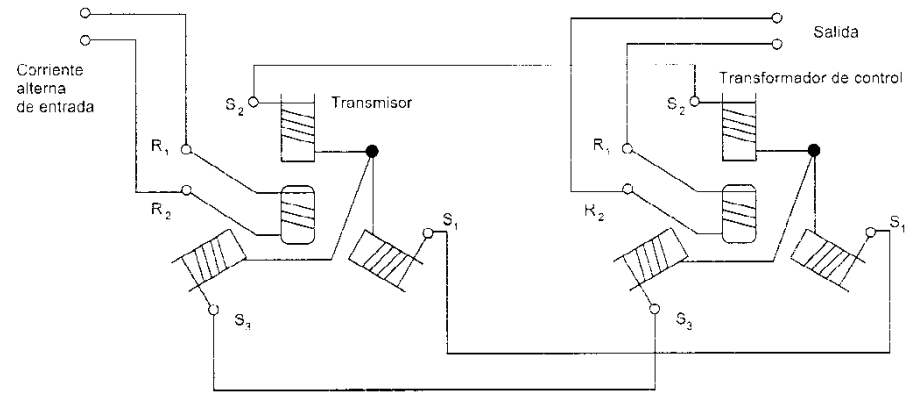


Figura 12.11 Detector de error con sincros

Con frecuencia los sincros se usan en pares (figura 12.11) como un medio para medir la diferencia entre el desplazamiento angular de dos ejes y así proporcionar una señal de error para un sistema de control. Cuando las posiciones de los rotores del sincro que se usa como transmisor y la del sincro que se usa como transformador de control están formando ángulos rectos, el voltaje generado a través de las terminales del rotor del transformador de control es cero. Cuando los dos están en algún otro ángulo, el voltaje del rotor no es cero y es aproximadamente una función senoidal de la diferencia entre los ángulos de los dos ejes. Sin embargo, para pequeñas desviaciones angulares, la salida se puede considerar proporcional a la diferencia angular.

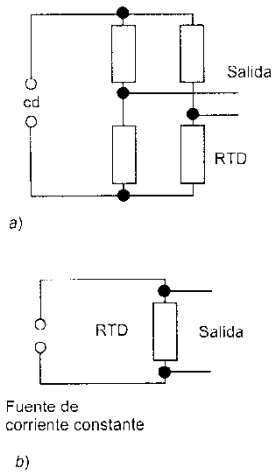


Figura 12.12 Circuitos: *a*) puente, *b*) corriente constante

Detector de temperatura por resistencia

El detector de temperatura por resistencia (RTD) es una forma muy común para sensar temperatura. La resistencia eléctrica de los metales o semiconductores cambia con la temperatura. La resistencia de los metales varía en forma lineal con la temperatura sobre un rango amplio de temperaturas, aunque el cambio real en la resistencia por grado es ligeramente pequeño. Por lo común, los RTD se hacen de platino, níquel o aleaciones de níquel. Los semiconductores, como los termistores, con la temperatura muestran en la resistencia cambios muy grandes no lineales. Los RTD se pueden usar en una rama de un puente de Wheatstone y la salida del puente se toma como medida de la temperatura (figura 12.12*a*), o se puede usar una fuente de corriente constante que pase a través del RTD y el voltaje se monitorea mediante éste (figura 12.12*b*).

Sensores de razón de flujo de fluidos

Existen varias formas de medir flujos, pero la más común se basa en la caída de presión que produce el flujo en una restricción (disminución en el área de la sección transversal) ubicada en la trayectoria del fluido. Para un fluido que a través de una restricción fluye en una tubería, pueda fluir la misma cantidad de masa y, por lo tanto, de volumen por segundo, Q, a través de las partes de la tubería con y sin la restricción, el fluido se debe mover a una velocidad mayor a través de la restricción. Por lo que se tiene que:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{Razón de flujo volumétrico}, Q$$

Un decremento en el área de la sección transversal desde A_1 hasta A_2 significará que la velocidad v_2 en la restricción es mayor que la velocidad v_1 en el tubo sin restricciones. Es necesaria una diferencia de presión para suministrar la fuerza que haga que el fluido acelere e incremente su velocidad. Para un fluido incompresible se puede aplicar la ecuación de Bernoulli:

$$gz_1 + \tfrac{1}{2} v_1^2 + \frac{P_1}{\rho} = gz_2 + \tfrac{1}{2} v_2^2 + \frac{P_2}{\rho}$$

y puesto que suponemos una tubería horizontal con altura z_1 = a altura z_2:

$$\tfrac{1}{2} v_1^2 + \frac{P_1}{\rho} = \tfrac{1}{2} v_2^2 + \frac{P_2}{\rho}$$

Ésta se puede reordenar para obtener

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{P_1 - P_2}{\rho}$$

De esta forma, con base en $A_1 v_1 = A_2 v_2 = Q$:

$$Q = \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho}}$$

Así, una medición de la diferencia de presión, $(P_2 - P_1)$, permite determinar la razón de flujo volumétrico, Q. Note que la relación entre la presión y la razón de flujo volumétrico es no lineal. En la práctica, esta ecuación es sólo una aproximación, debido a que se presentan pérdidas de energía como resultado de la fricción y éstas se consideran en la ecuación anterior. En la ecuación se inserta, entonces, un factor de corrección, C, denominado *coeficiente de descarga*, para dar como resultado:

$$Q = \frac{CA_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho}}$$

En este principio se basan varias formas de dispositivos de presión diferencial:

1 *Tubo Venturi*

En el tubo Venturi (figura 12.13) se presenta una disminución gradual de diámetro, desde el diámetro del tubo hasta el diámetro de restricción. La diferencia de presión entre el flujo antes de la restricción y en ésta se puede medir con una celda de presión de diafragma; las presiones se aplican en los dos lados del diafragma, de modo que la deflexión del diafragma es una medida de la diferencia de presión. El instrumento es de operación sencilla, tiene una exactitud de alrededor de ±0.5%, una confiabilidad a largo plazo y es relativamente costoso.

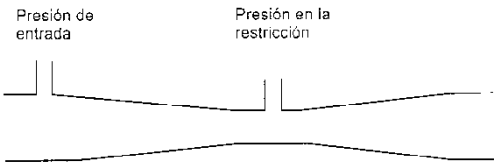


Figura 12.13 Tubo Venturi

2 *Medidor de flujo de boquilla*

Una forma económica de un tubo Venturi es el *medidor de flujo de boquilla*. Los dos tipos de boquilla que se usan son la boquilla Venturi (figura 12.14*a*) y la boquilla de flujo (figura 12.14*b*). Las boquillas son más baratas que los tubos Venturi, proporcionan diferencias de presión similares y tienen una exactitud de alrededor de ±0.5%.

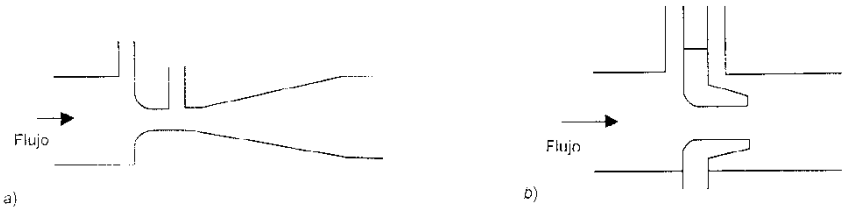
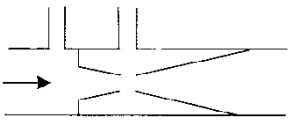
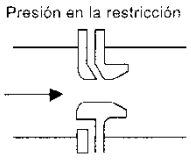


Figura 12.14 Medidores de flujo de boquilla: a) boquilla Venturi, b) boquilla de flujo



a)



b)

Figura 12.15 Medidores de flujo Dall: *a*) tubo, *b*) orificio

3 *Tubo Dall*

El tubo Dall (figura 12.15*a*) es otra variación del tubo Venturi. El tubo de Dall es sólo de casi dos diámetros del tubo donde se monta de largo. Una forma todavía más corta, el orificio Dall, es sólo de alrededor de 0.3 del diámetro del tubo donde se monta de longitud (figura 12.15*b*).

4 *Placa de orificio*

La placa de orificio (figura 12.16) es un disco con un hoyo. El efecto de introducirla es restringir el flujo a la apertura del orificio y el canal de flujo a una región aún más angosta corriente abajo (después) del orificio. La diferencia de presión se mide entre un punto de diámetro igual al del tubo corriente arriba (antes) del orificio y un punto de diámetro igual a la mitad corriente abajo. La placa de orificio es sencilla y confiable, más económica que el Venturi, pero menos exacta, alrededor de ±15%.

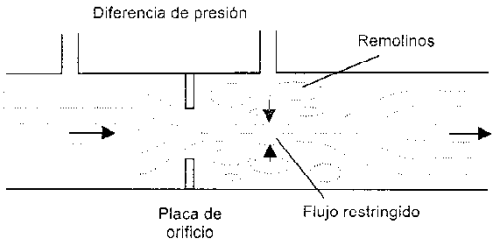


Figura 12.16 Medidor de flujo a base de una placa con orificio

Elementos eléctricos de corrección

Los *motores de corriente directa* son muy usados como elementos de corrección en sistemas de control. El motor de cd básico consta de bobinas de alambre montadas en ranuras sobre un cilindro de material ferromagnético. Éste se conoce como *devanado de armadura* y está montado, a su vez, sobre rodamientos de modo que gira con libertad en un campo magnético que se produce mediante una corriente que pasa a través de las bobinas de alambre (figura 12.17), conocidas como *bobinas de campo* o *devanado de campo*. Cuando una corriente pasa a través del devanado de armadura, sobre el devanado actúan fuerzas que hacen que éste gire. Para invertir la corriente, cada medio giro se usan las escobillas y el conmutador a fin de mantenerlo girando. Con el motor controlado por armadura, la velocidad se modifica al cambiar la magnitud de la corriente del devanado de armadura. Con frecuencia esto se hace usando fuentes de alimentación de voltaje fijas al devanado y se varía el tiempo para el cual la fuente está encendida. De esta manera se controla el valor promedio del voltaje y, por lo tanto, el de la corriente. Esto se conoce como *modulación por ancho de pulso* (PWM, por sus siglas en inglés: *pulse width modulation*).

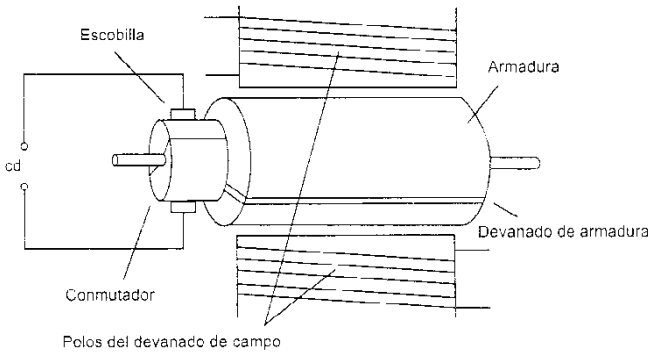


Figura 12.17 Elementos básicos de un motor de cd

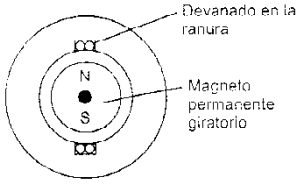


Figura 12.18 Motor de cd sin escobillas

En el capítulo 2 se desarrolló un modelo del motor de cd; los diagramas de bloques que describen las configuraciones se presentan en la figura 2.39.

Otra forma del motor de cd es el *motor de cd sin escobillas*. Éste usa un magneto (imán) permanente para proveer el campo magnético, y gira dentro de un devanado estacionario. La figura 12.18 describe el principio básico donde sólo se muestra una bobina del devanado. El motor es en esencia el arreglo del motor de cd básico "invertido". La velocidad de rotación se puede controlar usando modulación por ancho de pulso. Se usan circuitos electrónicos para invertir la corriente y proveer la conmutación.

Los *motores de corriente alterna* constan de dos partes básicas: un cilindro giratorio llamado *rotor* y una parte estacionaria denominada *estator*, el cual circunda al rotor y tiene los devanados que producen un campo magnético giratorio en el espacio que ocupa el rotor. Este campo magnético giratorio hace que gire el rotor.

Uno de estos motores, el *motor de inducción monofásico de jaula de ardilla*, se ilustra en la figura 12.19. El rotor consta de barras de cobre o aluminio que se fijan en las ranuras de dos anillos de los extremos para formar un conjunto de conductores paralelos conectados, la llamada jaula de ardilla. Cuando una corriente alterna pasa a través del devanado de estator, éste produce un campo magnético alterno; se induce una fuerza electromotriz (f.e.m.) en los conductores del rotor y fluye corriente a través de ellos. En estos conductores que transportan corriente actúan fuerzas. El rotor gira a una velocidad que determina la frecuencia de la corriente alterna aplicada al estator. Una forma de variar la velocidad de rotación es usar un circuito electrónico para controlar la frecuencia de la corriente alimentada al estator.

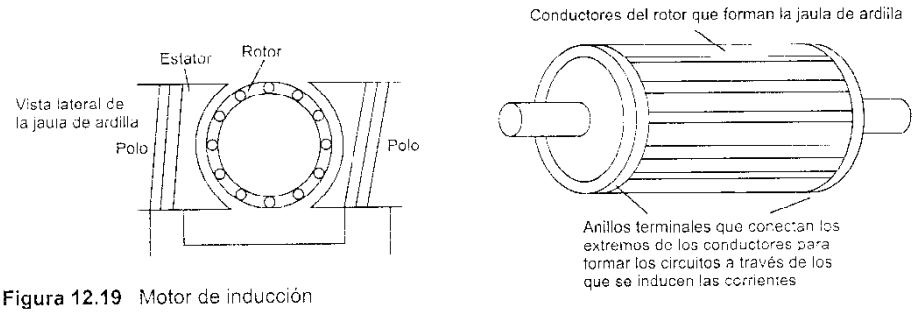

Estator
Rotor
Vista lateral de la jaula de ardilla
Polo
Polo
Conductores del rotor que forman la jaula de ardilla
Anillos terminales que conectan los extremos de los conductores para formar los circuitos a través de los que se inducen las corrientes

Figura 12.19 Motor de inducción

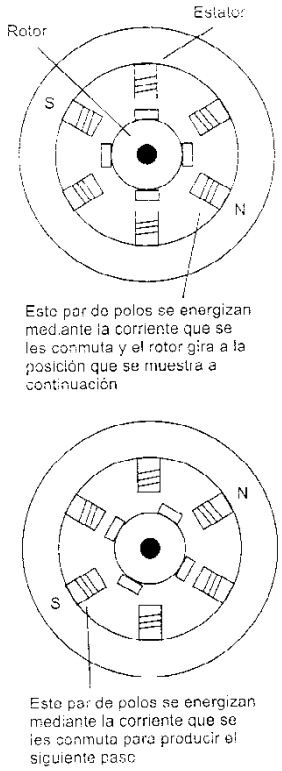

Rotor
Estator
S
N
Este par de polos se energizan mediante la corriente que se les conmuta y el rotor gira a la posición que se muestra a continuación
N
S
Este par de polos se energizan mediante la corriente que se les conmuta para producir el siguiente paso

Figura 12.20 Motor de pasos de reluctancia variable

El *motor de pasos* o *motor paso a paso* produce una rotación angular igual al ángulo de paso de cada pulso digital aplicado a su entrada que puede usar para posicionamiento angular exacto. Por ejemplo, un motor de pasos puede dar una rotación de 1.8° por cada pulso de entrada, por lo tanto, una entrada de 200 pulsos daría una rotación de 360°. Existen varios tipos de motores de pasos; la figura 12.20 muestra el principio básico del motor de *reluctancia variable*. Su rotor está hecho de acero suave y tiene varios dientes; el número de dientes es menor al número de polos sobre el estator. El estator tiene pares de polos y cada par se energiza mediante la corriente que pasa a través de los devanados que los envuelven. Cuando un par de polos se activa, se produce un campo magnético que atrae el par de dientes más cercano del rotor, de manera que los polos y dientes se alinean. Así, mediante la conmutación de la corriente al siguiente par de polos, se puede lograr que gire el rotor. De esta forma el rotor puede girar en pasos mediante la conmutación secuencial de la corriente de un par de polos al siguiente.

La entrada al motor de una secuencia de pulsos debe proporcionar las salidas a cada par del devanado del estator en la secuencia correcta. El sistema de manejo se puede obtener como un circuito integrado. La figura 12.21 ilustra el circuito integrado SAA1027 y sus conexiones que se usa con motores de pasos que tienen cuatro pares de polos en el estator. La entrada para accionar un solo paso de giro del motor de pasos es una transición de voltaje de bajo a alto para la entrada en la terminal 15. Las salidas del circuito integrado son corrientes en secuencia a lo largo de las conexiones café, negra, verde y amarilla a los devanados de estator. El motor se moverá en el sentido de las manecillas del reloj cuando en la terminal 3 se tiene un voltaje menor a 4.5 V, y en el sentido contrario a las manecillas del reloj, cuando es mayor a 7.5 V. Cuando la terminal 2 está en bajo, la salida se restaura a su posición inicial.

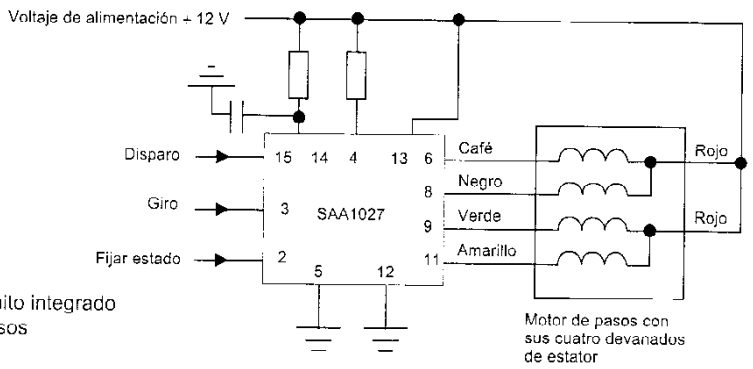


Figura 12.21 Circuito integrado para el motor de pasos

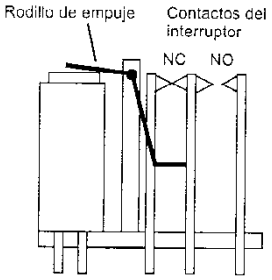


Figura 12.22 Relevador

En algunos sistemas de control se necesita que la salida del controlador conmute de encendido a apagado una corriente mucho más grande que la que requiere el elemento de corrección final, por ejemplo, la corriente que requiere un calefactor eléctrico en un sistema de control de temperatura. Esto se puede lograr mediante un *relevador*. Los relevadores son interruptores que operan en forma eléctrica y en los que al cambiar una corriente en un circuito eléctrico conmutan una corriente en otro circuito. En el relevador que muestra la figura 12.22, cuando hay una corriente a través del solenoide del relevador, se produce un campo magnético que atrae a la armadura de hierro, mueve el rodillo de empuje y, de esta manera, cierra los contactos del interruptor normalmente abierto (NO por sus siglas en inglés: *normally open*) y abre los contactos del interruptor normalmente cerrado (NC, por sus siglas en inglés: *normally closed*).

Elementos de corrección electroneumáticos o hidráulicos

En muchos sistemas de control se podría usar una salida eléctrica del controlador para operar una válvula solenoide y aprovechar esta acción para producir una señal neumática o hidráulica que active un dispositivo.

El elemento *solenoide* es en esencia un núcleo de hierro suave parcialmente en una bobina. Cuando la corriente pasa a través de la bobina se establece un campo magnético que atrae al núcleo de hierro un poco más hacia el interior de la bobina. La figura 12.23 muestra los elementos básicos de una *válvula solenoide simple* neumática. Cuando al solenoide se le aplica una corriente, la lanzadera se mueve a la derecha. Esto cambia los puertos a través de los cuales fluye el aire. Antes de activar el solenoide, la presión del aire de la fuente de suministro ingresa a la válvula y sale a través del puerto de salida. Cuando el solenoide se activa, el suministro de aire se apaga y el puerto de salida se conecta al puerto de escape.

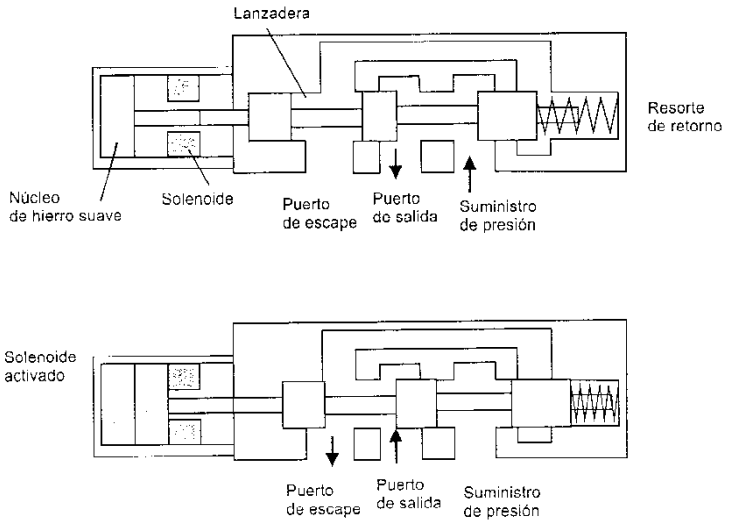


Figura 12.23 Válvula solenoide simple

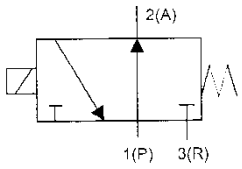


Figura 12.24 Símbolo de válvula

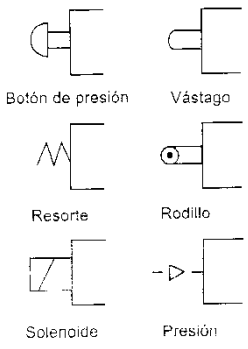


Figura 12.25 Actuadores para válvulas

Cuando ya no se aplica corriente al solenoide, el resorte regresa la válvula a su posición original. De esta manera, en la válvula que se muestra, la corriente al solenoide conmuta la presión de aire al puerto de salida de encendido a apagado.

El símbolo básico que se usa para una válvula de control es un cuadrado; cuando la válvula se puede conmutar de una posición a otra se usa un cuadrado para indicar cada una de estas posiciones. En cada cuadrado, las líneas indican las trayectorias del flujo; las flechas, la dirección del mismo. En la válvula que ilustra la figura 12.23 hay dos posiciones y el símbolo que se usa es como el que muestra la figura 12.24. En una válvula de dos posiciones, el cuadrado del lado derecho en general se usa para indicar la posición de reposo. En este caso, la posición de reposo se obtiene mediante la acción del resorte y su símbolo se dibuja junto a la caja del lado derecho. La posición de reposo muestra un puerto de suministro de presión, que se denota por 1 o P, conectado al puerto de salida, que se denota por 2 o A. El puerto de escape, que se denota por 3 o R, está cerrado. El símbolo de un solenoide se muestra junto a la caja del lado izquierdo, lo cual indica las conexiones hechas cuando el solenoide se activa. Pensar en el solenoide deslizando la caja del lado izquierdo bajo las conexiones de la tubería de modo que 1(P) ahora está cerrado y 2(A) se conecta a 3(R). La figura 12.25 ilustra algunos de los símbolos de los elementos de actuación en válvulas.

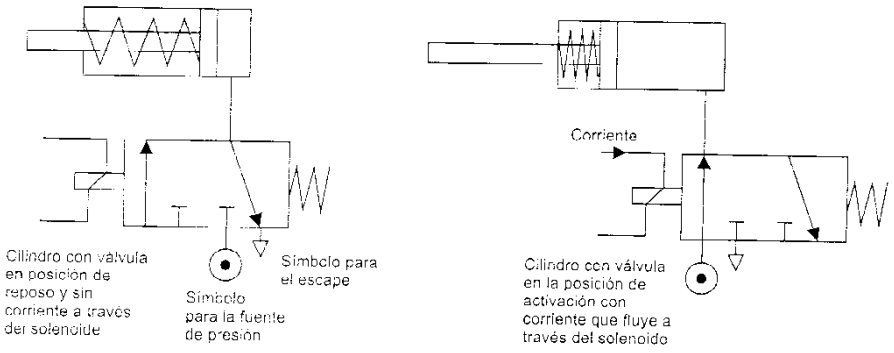

Cilindro con válvula en posición de reposo y sin corriente a través del solenoide
Símbolo para la fuente de presión
Símbolo para el escape
Corriente
Cilindro con válvula en la posición de activación con corriente que fluye a través del solenoide

Figura 12.26 Control de un cilindro de acción simple

La figura 12.26 muestra un ejemplo en el que se utiliza una válvula solenoide simple para controlar el movimiento de un pistón en un cilindro de acción simple. El cilindro tiene un pistón que se mueve en una dirección por la presión de la válvula y regresa por la acción de un resorte. Cuando la corriente pasa a través del solenoide, la válvula conmuta la posición y se aplica la presión para empujar el pistón en el cilindro.

Como ejemplo adicional, la figura 12.27 muestra una *válvula solenoide doble* para controlar el movimiento del pistón en un cilindro. Una válvula solenoide doble se sitúa en una posición mediante la operación de un solenoide y en otra posición por la operación del segundo solenoide; la válvula permanece en cada posicion hasta que recibe una señal para cambiarla. No hay resorte, para restaurar. El cilindro se denomina de *doble acción* puesto que requiere una presión en un lado del pistón para moverlo en una dirección y una presión en el otro lado del pistón para regresarlo. Cuando la corriente fluye a través del solenoide en el extremo izquierdo de la válvula, el pistón se empuja y permanece en esta posición hasta que recibe una señal de la válvula para regresar al pistón; la señal es una corriente que pasa a través del solenoide del lado derecho.

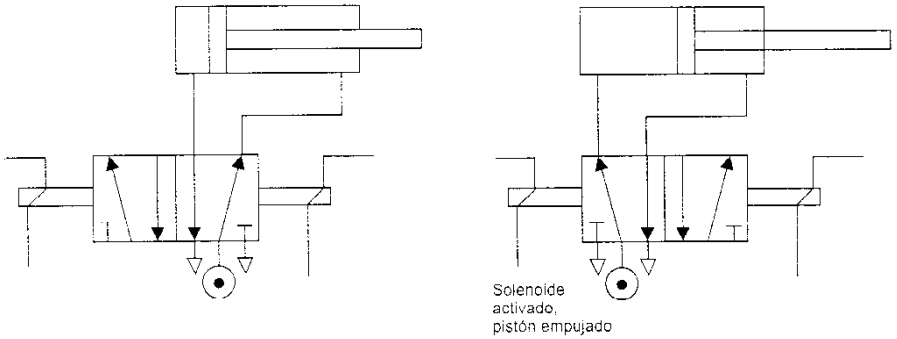


Figura 12.27 Control de un cilindro de doble acción

Ejemplos de sistemas de control

Los siguientes sistemas de control emplean los elementos descritos al inicio de este capítulo.

Con frecuencia los potenciómetros se usan con sistemas de control con motores de cd para la realimentación de la posición, de modo que el motor se puede utilizar para mover algún objeto a una posición requerida. La figura 12.28 describe un ejemplo sencillo e ilustra el equipo básico. La figura 12.29 es el diagrama de bloques para el sistema de la figura 12.28 y muestra las funciones involucradas.

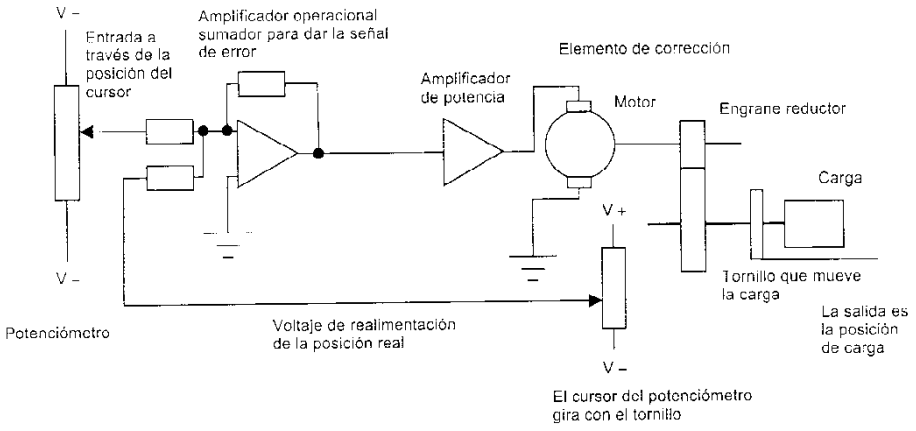


Figura 12.28 Sistema de control de posición

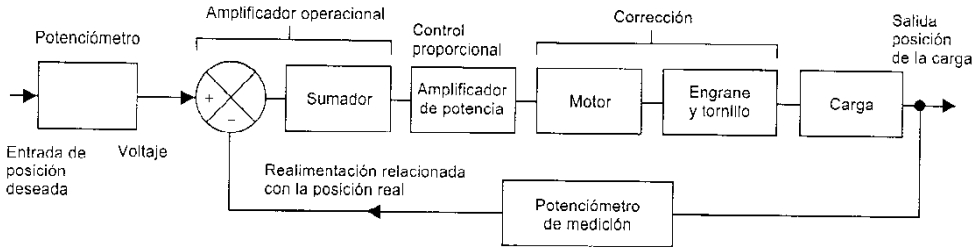


Figura 12.29 Sistema de control de posición

La entrada es una posición deseada que se fija mediante la posición del cursor de un potenciómetro. La realimentación de la posición se logra con otro potenciómetro. El voltaje de entrada y el de realimentación se combinan para producir el error; en este ejemplo se combinan con un amplificador operacional (el arreglo que presenta la figura 12.2 podría ser una alternativa). La señal de error, entonces, se amplifica para proporcionar una señal para controlar el elemento de corrección, el cual es un motor de cd. La salida del motor, después del engrane reductor, gira un tornillo, el cual, a su vez, mueve a la carga.

Debido a que el motor no es un sistema de orden cero, no responderá en forma instantánea a cualquier cambio súbito en la entrada (vea la página 67 para un análisis de la teoría básica de un motor de cd y la página 158 para la representación mediante diagramas de bloques y la obtención de su función de transferencia). Es probable que el sistema global sea de segundo orden, lo cual significa que cuando haya una entrada escalón, la salida tomará tiempo para alcanzar la salida deseada y quizá oscile alrededor de éste mientras se asienta al valor en estado estable. Se puede pensar en una situación como ésta. La entrada escalón hace que el eje del motor se acelere y cambie la posición de la carga y, debido al tiempo de retardo inherente al sistema, existe un atraso antes de que la posición de la carga se alimente de regreso al amplificador sumador, de modo que la carga sobrepasa su posición final y oscila alrededor de la posición requerida. La velocidad a la que estas oscilaciones desaparecen depende del amortiguamiento en el sistema; mientras más grande sea la ganancia del amplificador, mayor será la cantidad de amortiguamiento requerido. Sin embargo, se podría buscar una ganancia alta a fin de que el sistema tenga una respuesta rápida a un cambio en la entrada.

Una forma de tener una respuesta de alta velocidad con pocas oscilaciones es usar un sistema que tenga en cuenta la velocidad a la que cambia la posición de la carga, es decir, el control PD en lugar de usar sólo el control P. Esto se puede lograr al modificar el circuito del amplificador operacional mediante la inserción de un capacitor en la línea de entrada, como ilustra la figura 10.27. Sin embargo, otra forma más común de lograr el mismo efecto es usar un segundo lazo

de realimentación, el cual proporciona una medición relacionada con la velocidad a la que cambia la posición de la carga; ésta se denomina *realimentación de velocidad*. La figura 12.30 muestra cómo se puede modificar el sistema de la figura 12.29 para incluir la realimentación de velocidad y la figura 12.31 ilustra el diagrama de bloque funcional.

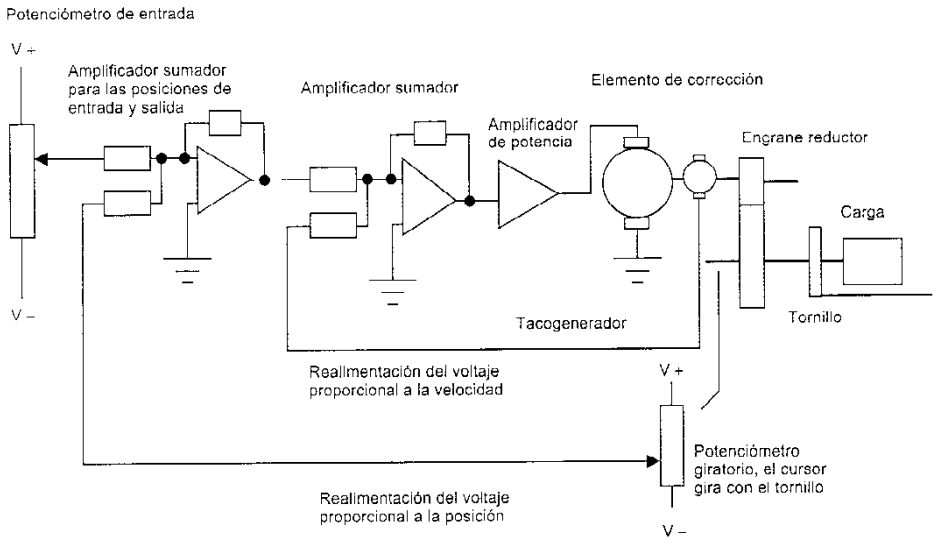


Figura 12.30 Sistema con realimentación de velocidad

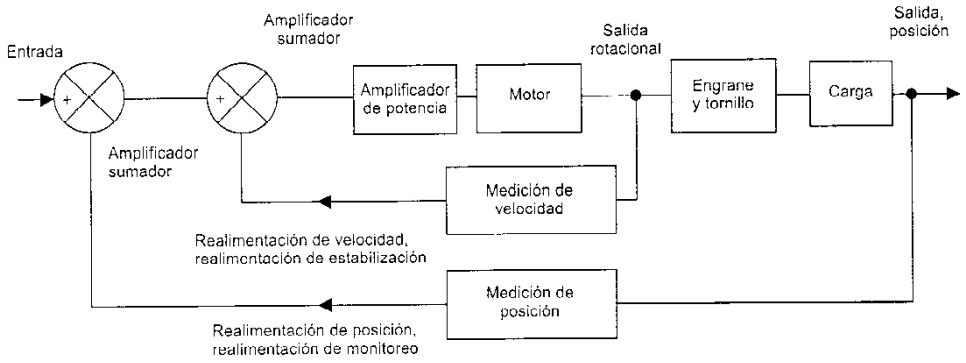


Figura 12.31 Sistema con realimentación de velocidad

Un sensor, por ejemplo, un tacogenerador, permite obtener un voltaje proporcional a la velocidad de rotación del eje y, por lo tanto, proporcional a la velocidad en que cambia la posición de la carga. De esta manera, cuando hay un cambio súbito en la entrada al sistema de control y el eje del motor se acelera en forma súbita, el tacogenerador proporciona una señal de realimentación; esta señal se sustrae de la señal de realimentación de posición y amortigua la razón de cambio, con lo que se reduce la oscilación.

Ejemplo 1

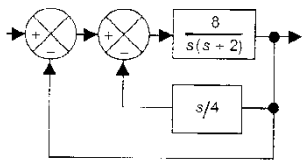


Figura 12.32 Ejemplo 1

Un sistema de control de posición que involucra un motor con ambas realimentaciones, de posición y de velocidad, se modela mediante el sistema que muestra la figura 12.32. Determinar el factor de amortiguamiento relativo cuando *a*) no hay realimentación de velocidad y *b*) sí hay realimentación de velocidad.

Respuesta

a) Sin realimentación de velocidad, el sistema tiene una función de transferencia de

$$G(s) = \frac{8 / s(s+2)}{1 + 8 / s(s+2)} = \frac{8}{s(s+2) + 8}$$

El denominador tiene la ecuación $s^2 + 2s + 8$; así, la frecuencia natural es $\sqrt{8} = 2.8$ rad/s y $2\zeta\omega_n = 2$, por lo tanto el factor de amortiguamiento relativo ζ, es 0.36.

b) Con realimentación de velocidad se pueden reemplazar las partes $8/s(s+2)$ y $s/4$ del sistema mediante un solo bloque (vea la página 152 para un ejemplo de esta simplificación) si la función de transferencia es

$$\frac{8/s(s+2)}{1 + [8/s(s+2)][s/4]} = \frac{8}{s(s+2) + 2s} = \frac{8}{s^2 + 4s}$$

La función de transferencia global del sistema es, de esta manera

$$G(s) = \frac{8/(s^2 + 4s)}{1 + 8/(s^2 + 4s)}$$

El denominador tiene la ecuación $s^2 + 4s + 8$, por lo tanto, la frecuencia natural es $\sqrt{8} = 2.8$ rad/s y $2\zeta\omega_n = 4$, y así, el factor de amortiguamiento relativo ζ, es 0.71.

Problemas

1 Sugiera elementos de medición que podrían usarse para proporcionar señales de realimentación para lo siguiente:
   a) La velocidad a la cual fluye la luz a través de una tubería.
   b) La velocidad a la que gira un eje
   c) La posición del elemento de una máquina

2 La figura 12.33*a* muestra un sistema de control de posición. Explicar cómo trabaja y mostrar que el modelo de la figura 12.33*b* puede describir el sistema.

3 La figura 12.34 muestra un sistema de control de espesor de una hoja de material. Sugerir los posibles elementos que se podrían usar para el sensor de espesor y para el actuador lineal.

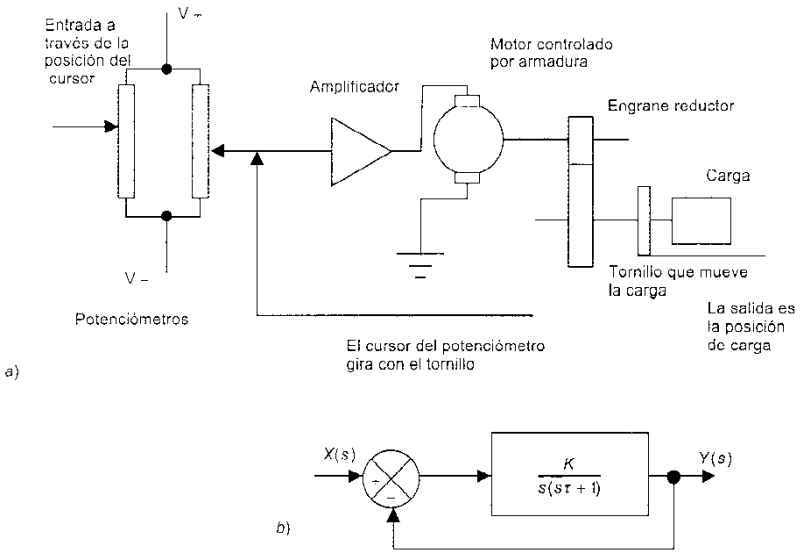


Figura 12.33 Problema 2

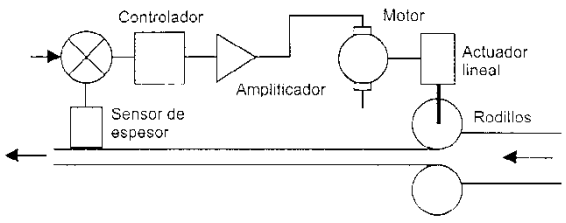


Figura 12.34 Problema 3

4 La figura 12.35 describe un sistema de control de posición con realimentación de velocidad. Determinar el factor de amortiguamiento relativo del sistema cuando no hay realimentación de velocidad y determinar el valor de k necesario para proporcionar un factor de amortiguamiento relativo de 0.6 cuando se usa la realimentación de velocidad.

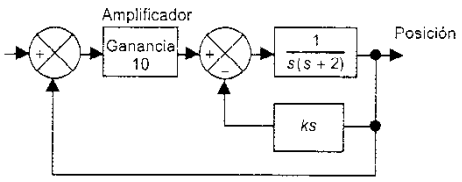


Figura 12.35 Problema 4

5 Sugerir un sistema de control que se pudiera usar para el control de un brazo artificial.

13 Control de procesos discretos

Introducción

Un *proceso discreto* involucra distintas operaciones, cada una de las cuales tiene una condición definida para iniciarse. El control es, entonces, una secuencia de operaciones. Así se podría ejercer el control de modo que inicie la operación 1 y la operación 2 no pueda iniciar hasta que se complete la operación 1, la operación 3 no puede iniciar hasta que se complete la operación 2, etcétera; esta secuencia está *manejada por eventos*. De forma alternativa se pueden tener operaciones en secuencia en tiempos preestablecidos, por ejemplo, la operación 2 inicia 30 s después de la operación 1; esta secuencia está *manejada por tiempo*.

Este capítulo presenta el control de procesos discretos, que se ilustra con el estudio del secuenciado mediante cilindros neumáticos, para después describir el uso de controladores lógicos programables.

Procesos discretos

Un ejemplo sencillo de qué significa control de procesos discretos es la lavadora de ropa doméstica. Al accionar el interruptor de inicio se abre una válvula que permite que el agua pase a la tina de la lavadora. Cuando el sensor indica que el agua está en el nivel requerido, la válvula se cierra de forma que se completa la operación 1 y puede iniciar la operación 2. Se enciende entonces el calentador. Cuando el sensor indica que la temperatura del agua ha alcanzado el valor preestablecido, el calentador se apaga. La operación 2 se completa y entonces puede iniciar la operación 3. La tina de la lavadora inicia el movimiento y continúa por un tiempo preestablecido, digamos 5 minutos. La operación 3 se completa y entonces puede iniciar la operación 4. La secuencia de operaciones continúa hasta que se completa la secuencia requerida.

Con el control de procesos discretos, las operaciones se realizan en secuencia de acuerdo con un programa establecido. Una sola operación podría ser un proceso de control en lazo cerrado o uno en lazo abierto controlado por tiempo con operaciones en una secuencia de-

terminada por condiciones, quizá iniciar cuando la operación 1 se haya completado o cuando hayan ocurrido los eventos 1 y 2 o en algún otro orden preestablecido de tiempos.

A continuación se presentan algunos métodos para describir procesos secuenciales.

1 *Listas de instrucciones*

Una lista de instrucciones establece con palabras la secuencia de acciones que llevan a cabo para cada paso en la secuencia requerida. Por ejemplo:

La salida A se presenta cuando ocurre la entrada 1 y han transcurrido 100 s.
La salida B se presenta cuando ocurre la entrada 2 y han transcurrido 10 s.
La salida C se presenta cuando ocurre la entrada 3 y han transcurrido 10 s.
etcétera

2 *Diagramas de tiempos del proceso*

Un diagrama de tiempos del proceso es una gráfica que describe cada una de las operaciones de la secuencia como funciones del tiempo. La figura 13.1 ilustra esta situación.

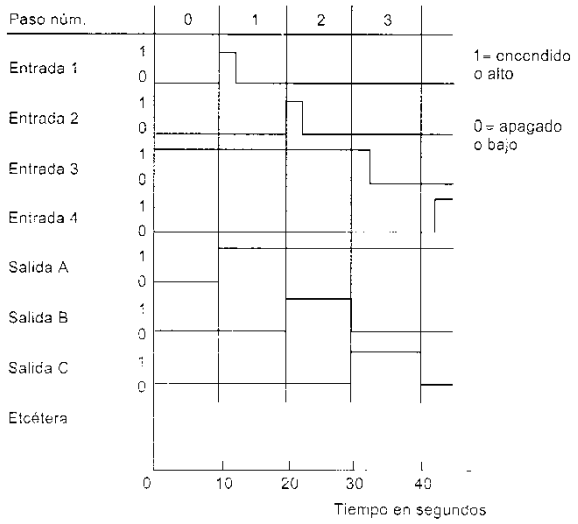


Figura 13.1 Carta de tiempos

3 *Diagramas de escalera*

Éstos muestran cada paso en el proceso como el escalón de una escalera. La figura 13.2 ilustra este caso; se incluyen las notas para explicar las condiciones especificadas para cada escalón.

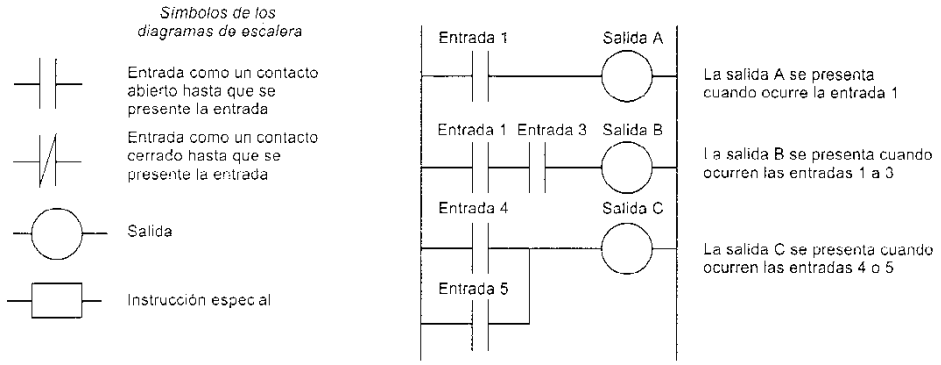

Símbolos de los diagramas de escalera
Entrada como un contacto abierto hasta que se presente la entrada
Entrada como un contacto cerrado hasta que se presente la entrada
Salida
Instrucción especial
Entrada 1
Salida A
La salida A se presenta cuando ocurre la entrada 1
Entrada 1
Entrada 3
Salida B
La salida B se presenta cuando ocurren las entradas 1 a 3
Entrada 4
Salida C
La salida C se presenta cuando ocurren las entradas 4 o 5
Entrada 5

Figura 13.2 Diagrama de escalera

Un diagrama de escalera es como un circuito eléctrico; los lados verticales de la escalera están conectados a la alimentación de voltaje y los escalones son circuitos con interruptores como entradas y dispositivos que se encienden o apagan por la acción de los interruptores en un escalón como salidas. En el capítulo 14 se dan más ejemplos.

4 *Diagramas de flujo*

Un diagrama de flujo usa bloques para representar cada paso y líneas para mostrar la trayectoria de un paso a otro (figura 13.3).

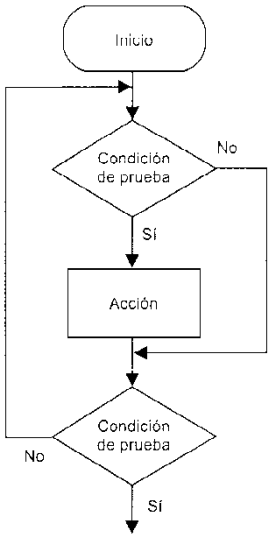


Figura 13.3 Diagrama de flujo

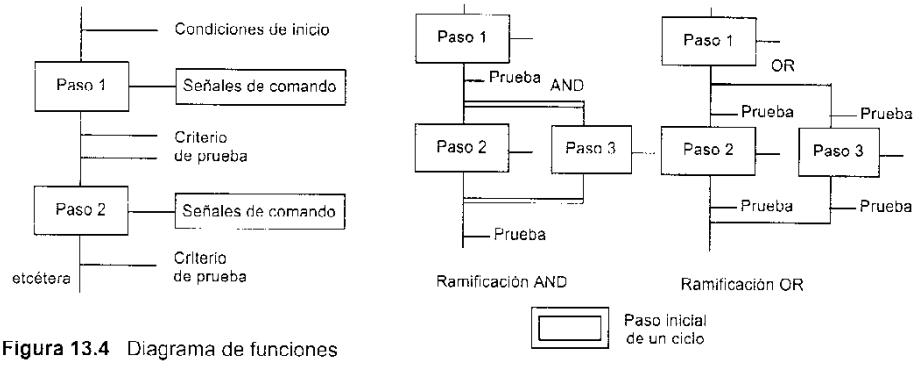
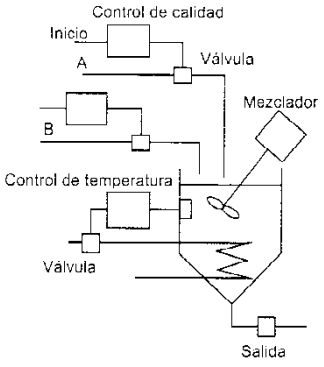


Figura 13.4 Diagrama de funciones

5 *Diagramas de funciones secuenciales*

Para representar cada paso, estos diagramas usan bloques unidos con líneas que indican las transiciones de un paso a otro. La figura 13.4 muestra su forma.



a)

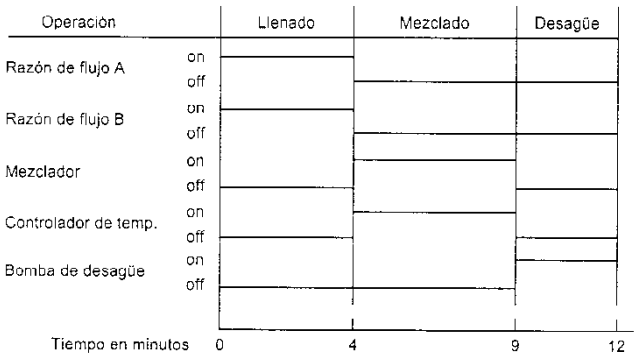
Ejemplo 1

Esbozar el diagrama de tiempos del proceso para la mezcla de los líquidos A y B. La figura 13.5*a* ilustra el proceso y la lista de instrucciones es como sigue:

1 Presionar el botón de inicio. El tanque de mezclar se empieza a llenar con cantidades medidas de A y B durante 4 minutos.
2 El calentador se enciende y el mezclador opera para mezclar el contenido en el tanque durante 5 minutos.
3 El contenido del tanque se bombea hacia el exterior en 3 minutos.

Respuesta

La figura 13.5*b* muestra el diagrama de tiempos.



b)

Figura 13.5 Ejemplo: *a*) la mezcla de líquidos, *b*) diagrama de tiempos

Secuenciado mediante cilindros neumáticos

Muchos sistemas de control emplean cilindros neumáticos o hidráulicos como elementos de actuación. Por ejemplo, si hubiera dos cilindros, A y B, y se requiere que al presionar el botón de inicio, el pistón del cilindro A se extienda, cuando lo esté completamente, el pistón del cilindro B también estará extendido. Si esto ocurre, el pistón del cilindro A se podría retraer, y cuando esté por completo retraído se podría hacer que el pistón del cilindro B se retraiga. En el estudio de control secuencial con cilindros es común asignar una letra de referencia A, B, C, D, etcétera, a cada cilindro y para indicar el estado de cada cilindro se usa un signo + si está extendido o un signo – si está retraído. De este modo, la secuencia de operaciones es A+, B+, A–, B–. La figura 13.6 describe un circuito que se podría usar para generar esta secuencia. La secuencia de operaciones es:

1 Al principio ambos cilindros tienen los pistones retraídos. Se presiona el botón de presión de inicio de la válvula 1, con lo que se aplica presión a la válvula 2, el interruptor límite b– inicialmente está activado y, por lo tanto, opera la válvula 3 para aplicar presión al cilindro A y extenderlo.

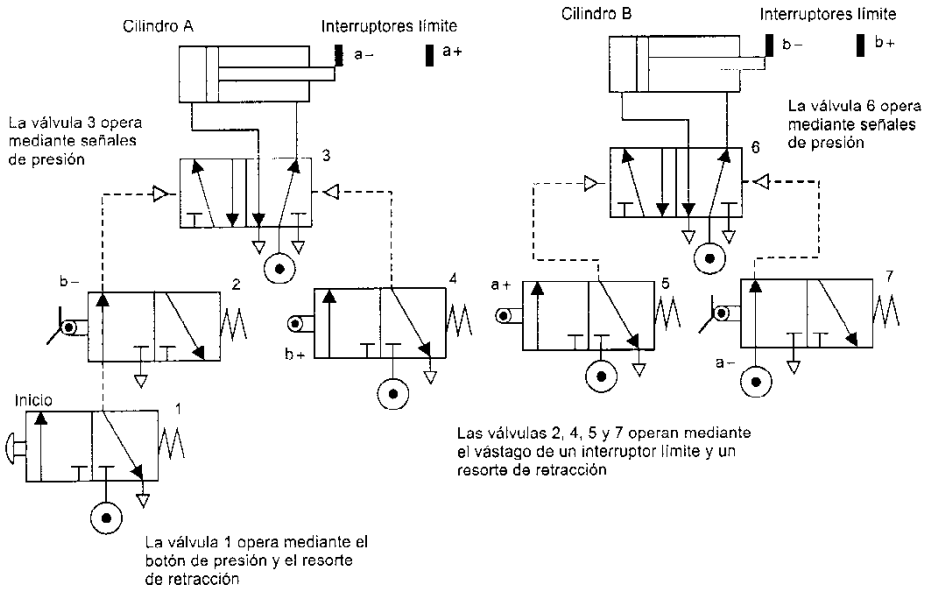


Figura 13.6 Operación secuencial de dos actuadores

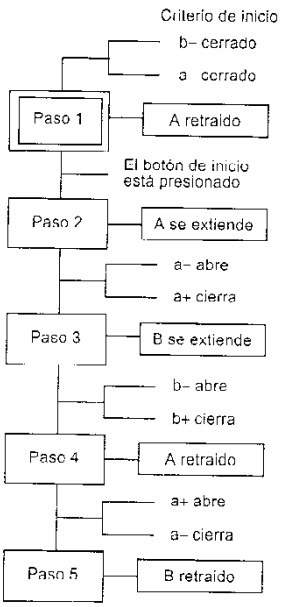


Figura 13.7 Diagrama de funciones

2 El cilindro A se extiende y libera al interruptor límite a–. Cuando el cilindro A está extendido por completo, el interruptor límite a+ cambia de estado. Esto también cambia el estado de la válvula 5 y propicia que se aplique presión a la válvula 6 para que cambie de estado y, así, aplicar presión al cilindro B para que su pistón se extienda.

3 El cilindro B se extiende, liberando el interruptor límite b–. Cuando el cilindro B está extendido por completo, el interruptor límite b+ cambia de estado. Esto también cambia el estado de la válvula 4 y propicia que se aplique presión a la válvula 6 para que cambie de estado y, de esta forma, aplicar presión al cilindro A para iniciar la retracción de su pistón.

4 El cilindro A se retrae y libera el interruptor límite a+. Cuando el cilindro A está retraído por completo, el interruptor límite a– cambia de estado. Esto también cambia el estado de la válvula 7 y propicia que se aplique presión a la válvula 5 y, de esta manera, aplicar presión al cilindro B para iniciar la retracción de su pistón.

5 El cilindro B se retrae y libera el interruptor límite b+. Cuando el cilindro B está retraído por completo, el interruptor límite b– cambia de estado para completar el ciclo.

El ciclo se puede iniciar otra vez pulsando el botón de inicio. Si se quisiera que el sistema trabajara de manera continua, entonces el último movimiento en la secuencia deberá tener un disparo al primer movimiento. La figura 13.7 muestra cómo debe aparecer la secuencia anterior cuando se representa con un diagrama de funciones.

Una alternativa para realizar la secuencia anterior requiere el suministro de aire para encender o apagar válvulas en grupos y se denomina *control en cascada*. Éste anula el problema que se presenta con circuitos (formados como ilustra la figura 13.6) de aire que quedan atrapados en la línea de presión para controlar una válvula y así evitan que la válvula cambie de estado. Con el control en cascada, la secuencia de operaciones se divide en grupos sin que aparezca, en cada grupo, más de una vez la letra de un cilindro. De esta manera, para A+, B+, B–, A– se pueden tener los grupos A+, B+ y A–, B–. Entonces se usa una válvula para cambiar el suministro de aire entre los dos grupos. En la línea que selecciona el primer grupo se incluye una válvula de inicio/paro, y si la secuencia se repite de manera continua, la última operación debe proporcionar la señal para iniciar la secuencia una vez más. La primera función en cada grupo se inicializa mediante el grupo que se enciende; acciones adicionales dentro del grupo se controlan mediante válvulas operadas por interruptor, y la operación de la última válvula inicializa el siguiente grupo que se seleccione. La figura 13.8 muestra el circuito neumático.

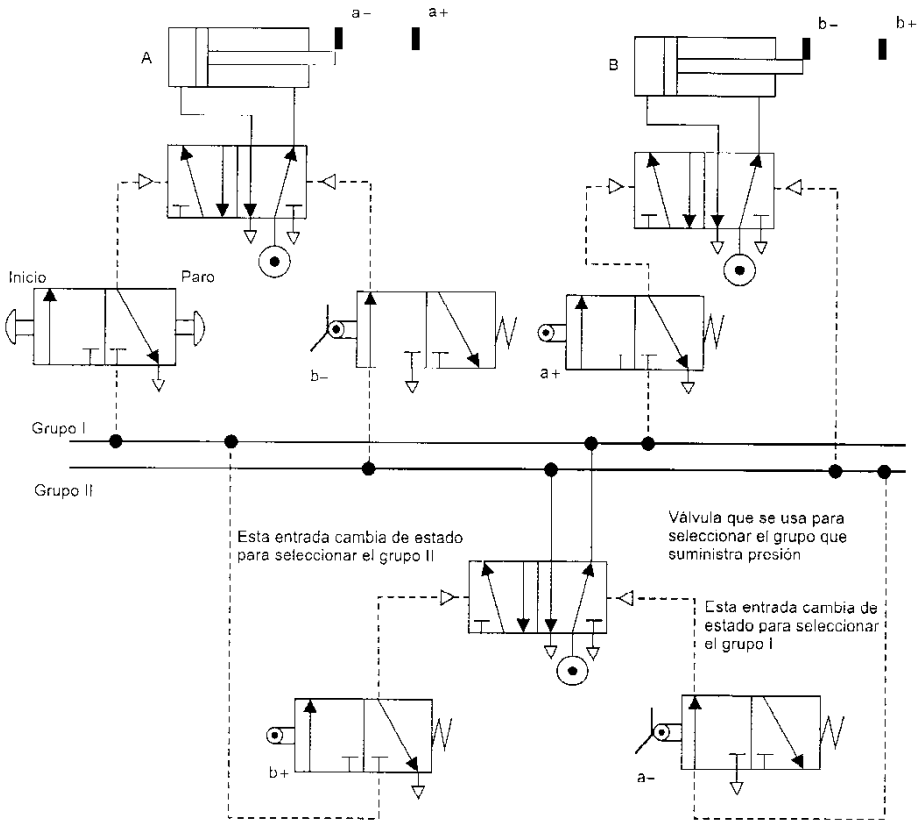


Figura 13.8 Control en cascada que se usa para proporcionar la secuencia A+, B−, B−, A−

Ejemplo 2

Establecer la secuencia que se presentará con dos cilindros, A y B, cuando se presione el botón de inicio del sistema de la figura 13.9.

Respuesta

Éste es un ejemplo de control en cascada. Cuando se presiona el botón de inicio, se suministra aire para cambiar de estado la válvula que controla el cilindro A, de modo que éste se extiende. Cuando a+ está activado, se logra que B se extienda. Si b+ está activado, se selecciona el grupo II, lo cual hace que A se retraiga. Cuando a− está activado, B se retrae. Así, la secuencia es A+, B+, A−, B−.

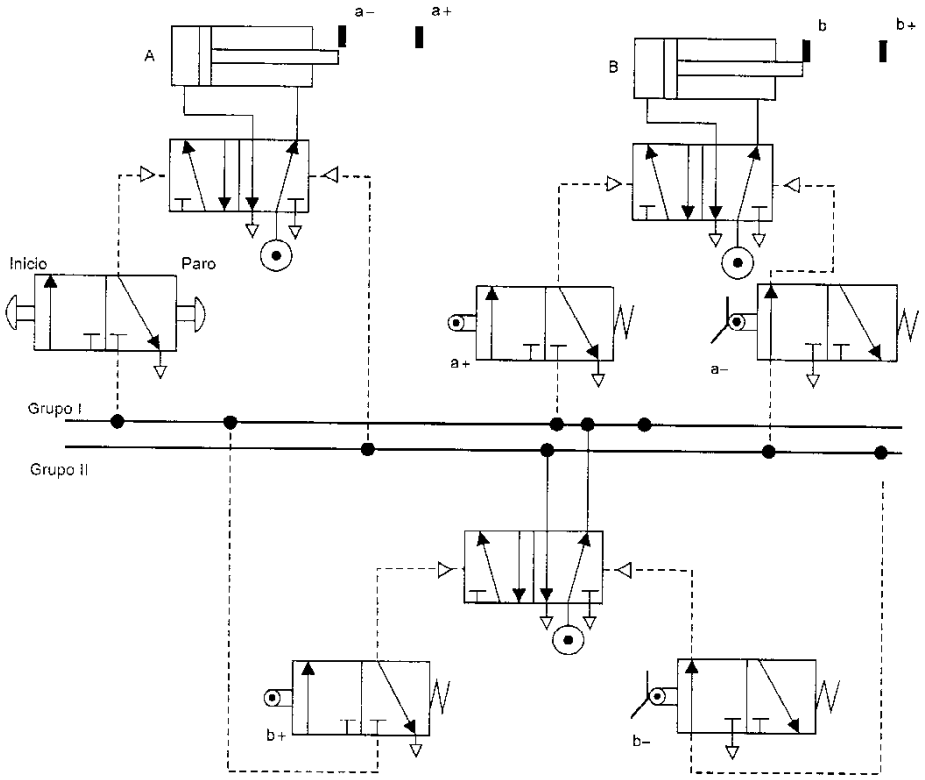


Figura 13.9 Ejemplo 2

Ejemplo 3

La figura 13.10 muestra un sistema de control con tres cilindros: A, B y C, y que usa válvulas controladas por solenoide y relevadores. Establecer la secuencia que tendrá cuando se cierra el interruptor de inicio y utilizar un diagrama de escalera para describirla.

Respuesta

Cuando el interruptor de inicio se cierra , la corriente se suministra a los solenoides A+ y B+. Esto propicia que las válvulas cambien de estado y, de esta forma, apliquen presión a los cilindros A y B; por lo tanto, ambos pistones se extienden. La extensión de los dos pistones cierran los interruptores límite a+ y b+. Al cerrar a+, alimenta corriente a la bobina del relevador 1, el cual cierra sus contactos y, de esta manera, suministra corriente al solenoide C+. Esto propicia que C se extienda y, por lo tanto, c+ se cierra: así la corriente se alimenta a A− y B−, causando que ambos se retraigan. Cuando A se retrae, a− se cierra y se aplica corriente a la bobina del relevador 2. Éste cierra

sus contactos, permitiendo que la corriente fluya a través de C–, por lo tanto, C se retrae. La secuencia es, de este modo, A+ y B+ con forma concurrente, C+, A– y B– concurrentemente, C–. La figura 13.11 describe el diagrama de escalera para la secuencia.

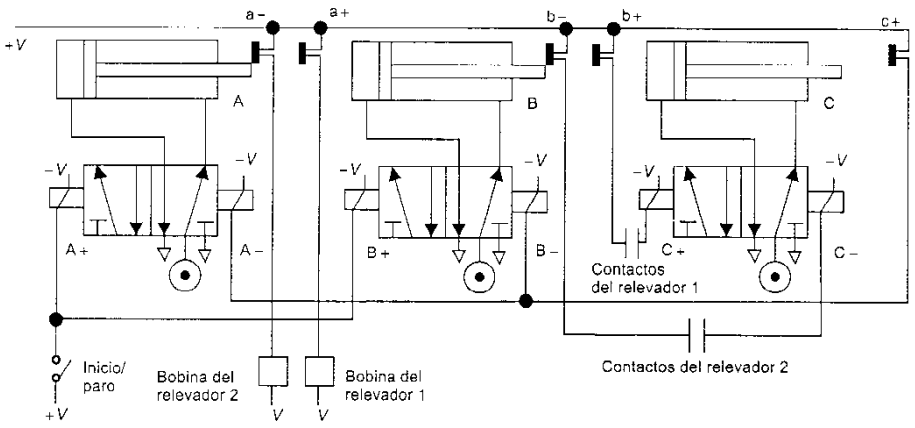


Figura 13.10 Ejemplo 3

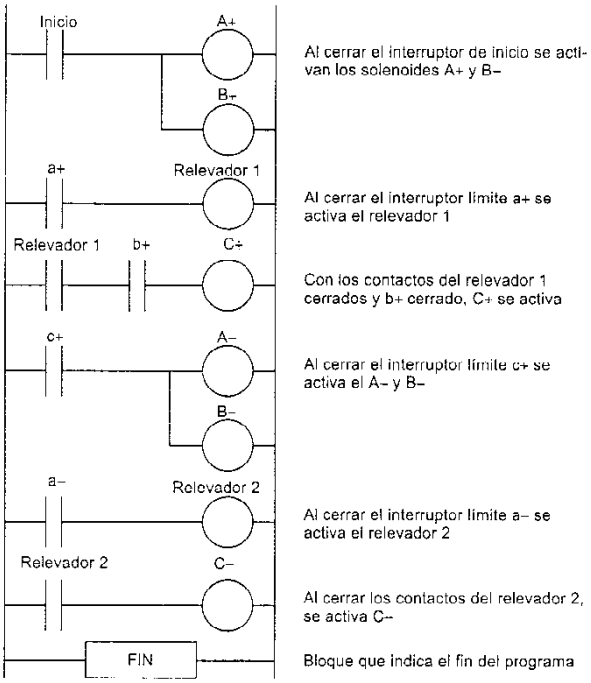

Inicio
A+
B–
Relevador 1
a+
Relevador 1
b+
C+
c+
A–
B–
a–
Relevador 2
Relevador 2
C–
FIN
Al cerrar el interruptor de inicio se activan los solenoides A+ y B–
Al cerrar el interruptor límite a+ se activa el relevador 1
Con los contactos del relevador 1 cerrados y b+ cerrado, C+ se activa
Al cerrar el interruptor límite c+ se activa el A– y B–
Al cerrar el interruptor límite a– se activa el relevador 2
Al cerrar los contactos del relevador 2, se activa C–
Bloque que indica el fin del programa

Figura 13.11 Ejemplo 3

Microprocesadores como controladores

Un *microprocesador* es un solo componente electrónico que contiene la CPU (por sus siglas en inglés: *central processing unit*) de una computadora. Un *microcontrolador* es una computadora digital completa como un solo componente electrónico. De esta forma, éste contiene la CPU, la memoria y la entrada salida, I/O (por sus siglas en inglés *input/output*); por ejemplo, el MC68HC11E1 tiene 12 K bytes de ROM (por sus siglas en inglés: *read-only memory*), 512 bytes en el chip de EEPROM (por sus siglas en inglés: *electronic erasable programmable read-only memory*), 12 bytes en el chip de RAM (por sus siglas en inglés: *random access memory*), un sistema de temporización, circuitos de interfase, un convertidor analógico digital de 8-bits y 38 líneas de entrada salida de propósito general. Los microcontroladores son muy usados para control como dispositivos dedicados embebidos en las aplicaciones; por ejemplo, como controladores de la máquina en automóviles o lavadoras de ropa domésticas, y como controladores de exposición y enfoque automático en cámaras fotográficas. Una forma dedicada de sistema basado en microprocesador que se usa con amplitud para control, en particular para control de procesos discretos, es el controlador lógico programable (PLC, por sus siglas en inglés: *programmable logic controller*) que se estudia con mayor detalle en la siguiente parte de este capítulo.

Para mayores detalles de la arquitectura y programación de los microprocesadores, se recomiendan al lector los textos *Microprocessor Technology* de S. Anderson (Newnes, Butterworth-Heinemann, 1994), *Microprocessors: Theory and Application* de M. Rafiquzzam (Prentice Hall, 1992), *The M68HC11 Microcontroller* de M. Kheir (Prentice Hall, 1997), *Programming and Interfacing the 8051 Microcontroller* de S. Yeralan y A. Ahluwalia (Addison-Wesley, 1993).

Controladores lógicos programables

Un *controlador lógico programable* (PLC) es un microprocesador para uso en control general que emplea memoria programable para almacenar instrucciones e implementar funciones lógicas, de secuencia, de temporización, de conteo y aritméticas. El PLC se programa de modo que el programa de control puede ingresar mediante un lenguaje sencillo, en general de la forma de programas de escalera. Para modificar el programa de control, el operador sólo necesita alterar el programa de escalera. La figura 13.12 ilustra la forma básica de un sistema PLC.

La unidad de entrada/salida proporciona los canales de enlace entrada/salida a través de los cuales se conectan los dispositivos de entrada como los sensores, y los dispositivos de salida como los motores o solenoides. Cada punto de entrada/salida tiene una dirección única que se puede usar mediante la CPU. Los canales de entrada/salida proveen aislamiento y acondicionamiento de la señal, de modo que sensores y actuadores con frecuencia se pueden conectar en forma directa a éstos sin necesidad de circuitería adicional.

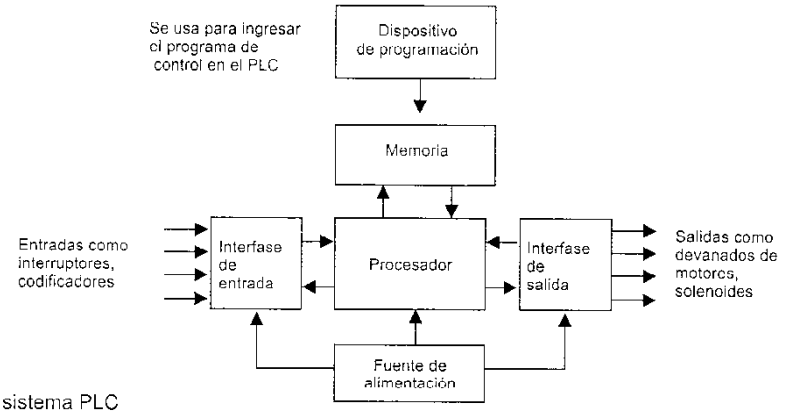


Figura 13.12 El sistema PLC

La figura 13.13 ilustra la forma básica del canal de entrada de un PLC con un optoacoplador para aislamiento. Cuando el pulso digital pasa a través del diodo emisor de luz del optoacoplador, se produce un pulso de radiación infrarroja, al que detecta un fototransistor y presenta un aumento de voltaje. De esta manera, un pulso digital en un circuito levanta un pulso digital en otro circuito; el espacio entre el diodo emisor de luz y el fototransistor produce el aislamiento eléctrico.

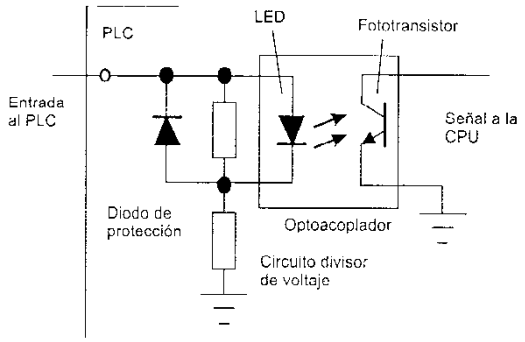


Figura 13.13 Canal de entrada de cd básico

Los canales de salida se especifican como de tipo relevador, tipo transistor o tipo triac. Con el de *tipo relevador* (figura 13.14) la señal de salida del PLC se usa para operar un relevador; así, además de no estar aislado del circuito externo, es capaz de manejar corriente del orden de varios amperes en un circuito externo. Se dispone de estas

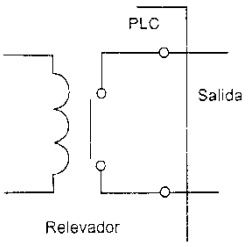


Figura 13.14 Canal de salida tipo relevador

salidas para manejar cd y ca y soportar cambios súbitos de corriente y voltajes transitorios. El de *tipo transistor* (figura 13.15) usa un transistor para manejar corriente a través de un circuito externo. Esto produce una acción de conmutación muy rápida, que, sin embargo, es sólo para manejar cd y se destruye por sobrecorrientes o voltajes de inversa altos. Las salidas de triac, con optoacopladores para aislamiento, se usan para controlar cargas externas conectadas a fuentes de alimentación de ca.

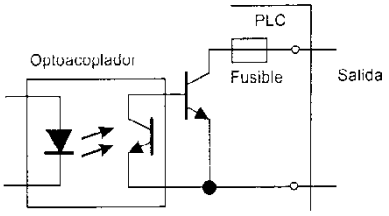


Figura 13.15 Canal de salida tipo transistor

Un PLC corre su programa en forma continua, actualizándolo como resultado de los cambios en las señales de entrada. Para actualizar se pueden usar dos métodos: la actualización continua y el copiado masivo de las entradas/salidas. Con la actualización continua, cada uno de los canales de entrada se revisan en la secuencia que se presenta en el programa, haciendo los cambios en el programa, que es la forma de actualizar las salidas. Después de completar el ciclo completo, el programa se repite y cuando una salida se actualiza, permanece en ese estado hasta que alcanza el siguiente ciclo. Dado el tiempo que se invierte en cuestionar cada una de las entradas en turno, el tiempo necesario para completar un ciclo puede ser comparativamente largo. Con el copiado masivo de entradas/salidas, este tiempo se reduce. Se asigna un área de memoria como búfer de almacenamiento entre la CPU y la unidad de entrada/salida. Al iniciar el ciclo del programa, la CPU revisa todas las entradas y copia su estado en el búfer de almacenamiento. A medida que el programa se ejecuta, se leen los datos almacenados, se implementan las instrucciones en el programa y las señales de salida se guardan en el búfer de almacenamiento. Al final del ciclo, todas las salidas se implementan con la información en el búfer de almacenamiento.

La CPU debe ser capaz de identificar cada entrada y salida específicas mediante la localización de direcciones de cada una. Una dirección es, por lo común, una letra que indica si es una entrada o una salida, y un número de tres dígitos. Es común usar X o I para entradas y Y u O para salidas. De este modo, en un PLC Mitsubishi, X400 podría ser la dirección de una entrada y Y430 la de una salida.

Programación de PLC

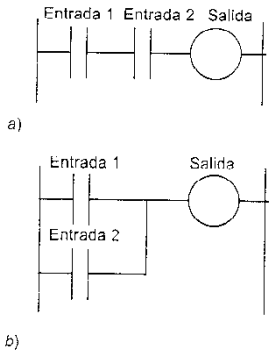


Figura 13.16 Compuertas lógicas: *a*) AND, *b*) OR

En programas de PLC es común usar diagramas de escalera. Cada escalón en la escalera define una operación y se lee de izquierda a derecha; los escalones en la escalera se leen de arriba hacia abajo. Cada escalón debe iniciar con una entrada o entradas y terminar, al menos, con una salida. Cada entrada y salida se identifica por su dirección y puede aparecer más de una vez en el programa. El escalón final de un ciclo se indica mediante la instrucción FIN (END).

Aquí se mencionan algunas operaciones básicas que se pueden realizar con un PLC.

1 *Compuertas lógicas AND y OR*

La figura 13.16 muestra cómo realizar estas compuertas. Con la compuerta AND sólo hay salida si existen entradas a 1 y 2. Con la compuerta OR hay salida cuando existen la entrada 1 o la entrada 2.

2 *Secuencias simples*

Estas se pueden producir si una salida activa una entrada, la cual puede a su vez activar la siguiente salida

Ejemplo 4

Dibujar un programa mediante un diagrama de escalera para un sistema neumático (figura 13.17) con válvulas solenoides dobles que controlan dos cilindros de doble acción, A y B, si se usan los interruptores límite a–, a+, b–, b+ para detectar los movimientos de los vástagos de los pistones en los cilindros y la secuencia de activación requerida de los cilindros es A+, B+, A–, B–.

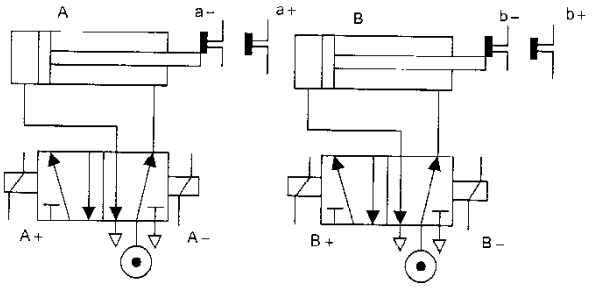


Figura 13.17 Ejemplo 4

Respuesta

La figura 13.18 muestra un posible programa. En el primer escalón se incluye un interruptor de inicio de entrada. De esta manera, A+ sólo se presenta cuando el interruptor de inicio y el interruptor b- están cerrados. Cuando A+ se presenta, el interruptor a+ está activado,

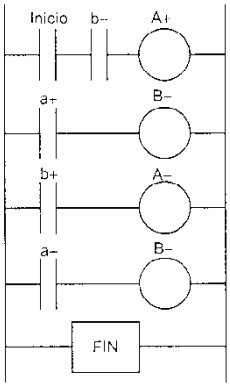


Figura 13.18 Ejemplo 4

lo cual conduce a la salida B+. Esto cierra el interruptor b+ y conduce a la salida A–, cerrando a– y produciendo así la salida B–. Con lo anterior concluye el ciclo y conduce otra vez al primer escalón, el cual espera que se cierre el interruptor de inicio antes de que se repita.

3 *Entrada de contactos normalmente cerrados*
La figura 13.19*a* muestra cómo se presenta una salida cuando no hay entrada 1; si la entrada ocurre, la salida desaparece. En la figura 13.19*b* la salida se presenta cuando no hay entrada 1, pero existe la entrada 2; si la entrada 1 se presenta, entonces la salida desaparece.

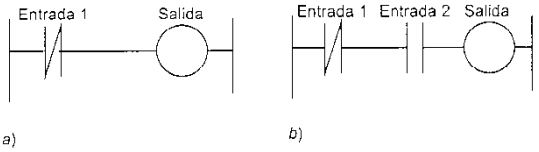


Figura 13.19 Entradas de apertura de contactos

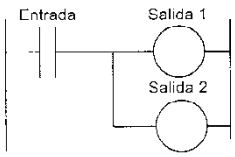


Figura 13.20 Salidas múltiples

4 *Salidas múltiples*
La figura 13.20 muestra cómo una entrada se puede usar para energizar dos salidas.

5 *Enclavamiento (latcheo)*
A menudo se presentan situaciones en las que es necesario mantener una salida energizada, aun cuando la entrada responsable de su energización haya desaparecido. Esto se logra con el *enclavamiento*. La figura 13.21 describe el ejemplo de un diagrama de escalera con enclavamiento. Cuando la entrada 1 se presenta se produce una salida; sin embargo, cuando ocurre la salida, ésta cierra otro conjunto de contactos de entrada, los cuales forman una compuerta lógica OR con los contactos de entrada. De esta manera, aun si la entrada desaparece, la salida permanece encendida. La única forma de detener la salida es abrir los contactos para aplicar una entrada en la entrada 2.

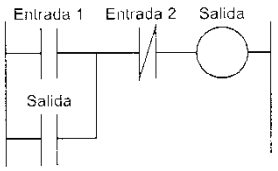


Figura 13.21 Enclavamiento

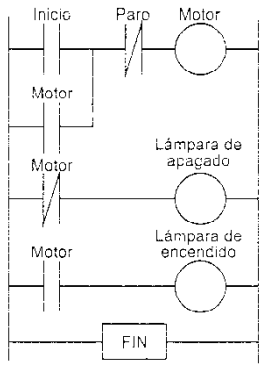


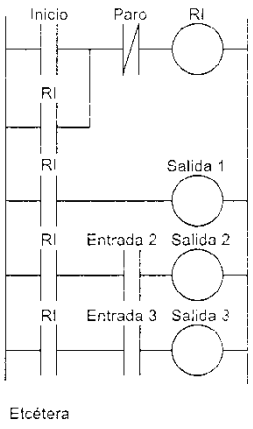
Figura 13.22 Ejemplo 5

Ejemplo 5

Dibujar un programa mediante un diagrama de escalera para un motor que lo enclavará en encendido cuando se presione el botón interruptor de entrada y lo apague cuando se use el interruptor de paro; la lámpara de señalización indica si el motor está apagado o encendido.

Respuesta

La figura 13.22 muestra un posible diagrama del programa. Sin entradas, la lámpara de señalización para el motor apagado está encendida. Cuando el interruptor de inicio se cierra – sus contactos están normalmente abiertos – se aplica la potencia al motor. Esto enclava al motor en encendido. Lo anterior también produce una salida en la lámpara de señalización para el motor encendido. Cuando el interruptor de paro se abre – sus contactos están normalmente cerrados – la salida al motor desaparece y se enciende la lámpara de señalización para la potencia apagada.



Etcétera

Figura 13.23 Uso de un relevador interno para salidas múltiples

6 *Relevadores internos*
Los PLC tienen elementos internos que se comportan como *relevadores internos*. Para programación se puede considerar que éstos tienen una salida que puede aparecer en un escalón del programa y contactos como entrada en otro escalón. La figura 13.23 muestra cómo se podrían usar relevadores internos para iniciar varias salidas diferentes. Cuando el interruptor de inicio se cierra, el relevador interno se energiza. Esto enclava la entrada de inicio y también inicia a la salida 1. Esto sería el suministro de potencia a una máquina. Entonces, la entrada 2 energizará la salida 2, la entrada 3 energizará a la salida 3, etcétera.

Ejemplo 6

Dibujar un programa mediante un diagrama de escalera para un sistema neumático (figura 13.17) con válvulas de control solenoide de doble acción y dos cilindros de doble acción, A y B, si los interruptores límite a–, a+, b–, b+ detectan los límites de movimiento de los vástagos de los pistones en los cilindros y se requiere la secuencia A +, B+, A–, B–.

Respuesta

Ésta es una repetición del ejemplo 4 de este capítulo, pero usando control en cascada. El grupo I es A+, B+ y el grupo II, B–, A–. La figura 13.24 describe un posible diagrama para el programa con un relevador interno para conmutar entre los dos grupos. Cuando el interruptor de inicio se cierra, el solenoide A+ se energiza. Esto hace que el interruptor límite a+ se cierre seguido por el estado B+. Con ello cierra al interruptor límite b+ y, de esta manera, energiza la bobina del relevador interno. Como resultado B– ocurre y b– se cierra seguido por el estado A–, y así se completa el ciclo.

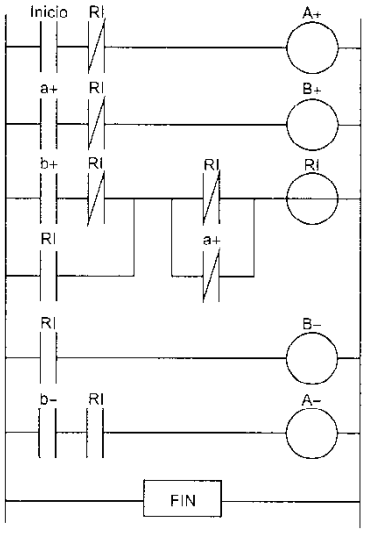


Figura 13.24 Ejemplo 6

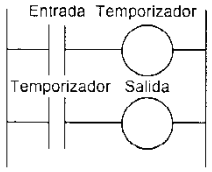


Figura 13.25 Temporizador

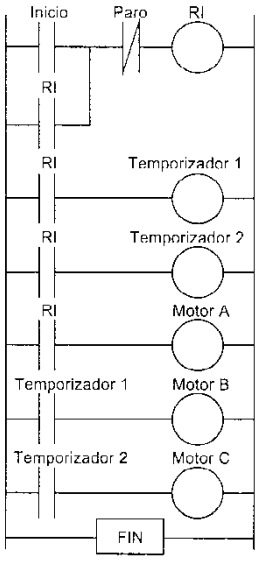


Figura 13.26 Ejemplo 7

7 *Temporizadores*

En los PLC los temporizadores se consideran en general como relevadores con bobinas, los cuales, cuando se energizan, producen el cierre o apertura de contactos de entrada después de cierto tiempo preestablecido. Existen diversas formas de temporizadores, aunque con PLC pequeños sólo hay una forma: los temporizadores con retardo de conexión. Éstos se encienden después de un retardo particular. Los temporizadores con retardo de desconexión están encendidos por un periodo antes de apagarse. Los temporizadores de pulso se encienden o apagan por un periodo fijo. La figura 13.25 muestra parte del diagrama de un programa que involucra un temporizador con retardo de conexión. Cuando hay una entrada, el temporizador se energiza e inicia la temporización. Después del tiempo preestablecido, sus contactos se cierran y se presenta la salida.

Ejemplo 7

Dibujar un programa mediante un diagrama de escalera que se pueda usar para realizar el encendido secuencial de los motores A, B y C de modo que cuando el interruptor de inicio se cierre, arranque el motor A, 10 s después arranque el B y después de 30 s lo haga el motor C.

Respuesta

La figura 13.26 describe el diagrama de un posible programa. Cuando el interruptor de arranque se cierra, el relevador interno se energiza. Éste enclava el arranque, inicia a los temporizadores 1 y 2, y en-

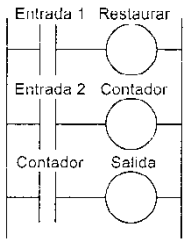


Figura 13.27 Contador

ciende el motor A. El temporizador 1 se preestablece a 10 s y el 1 a los 30 s. Después de 10 s, se cierran los contactos del temporizador 1 y se enciende el motor B, luego de 30 s se enciende el motor C.

8 *Contadores*

Por lo común los contadores se consideran como relevadores con bobinas que cierran o abren contactos cuando reciben el número de entradas preestablecidas en la cuenta. Los contadores hacia bajo cuentan desde el valor preestablecido hasta cero; los contadores hacia arriba van desde cero hasta un valor preestablecido. La figura 13.27 muestra los escalones básicos de un diagrama de escalera con un contador hacia abajo. Cuando en la entrada 1 hay una entrada, el contador se restaura a su valor preestablecido. Cada entrada en la entrada 2 hace que se sustraiga un 1 del valor del contador. Esto continúa hasta que el contador alcanza el valor de cero, entonces sus contactos se cierran y hay una salida.

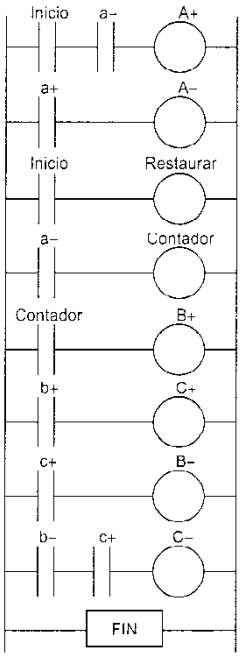


Figura 13.28 Ejemplo 8

Ejemplo 8

Dibujar un programa mediante un diagrama de escalera el que dé la secuencia A+, A–, A+, A–, A+, A–, A+, A–, B+, C+, B–, C– para el sistema neumático que se ilustra en la figura 13.17.

Respuesta

La secuencia A+, A– se repite cuatro veces y para ésta se puede usar un contador. La figura 13.28 muestra el diagrama del programa. Cuando el interruptor de inicio se cierra, con a– cerrado, se presenta A+. Esto cierra el interruptor a+ y produce el estado A–. Al cerrar el interruptor de inicio, el contador se restaura a su valor preestablecido de 4. Cuando se presenta a–, el contador incrementa su cuenta. El ciclo del programa se mantiene en repetición por sí mismo y genera A+, A– hasta que los contactos del contador se cierran y ocurre B+, Lo cual sucede después de que éste ha recibido cuatro entradas del interruptor límite a–. El programa entonces continúa a través de los otros escalones.

9 *Registros de corrimiento*

Los relevadores internos almacenan información en forma de estados encendido-apagado, es decir, bits. El registro de corrimiento es un grupo de relevadores internos en los que los bits se pueden recorrer de un relevador a otro. De esta manera, suponga que hay ocho relevadores internos con estados encendido-apagado de 01011001. Si se tiene una entrada de 1 al primer registro junto con una señal de corrimiento, los demás bits se mueven a lo largo una posición, el último bit se desbordará y perderá. De esta forma, ahora se tiene 10101100. El agrupamiento de relevadores internos para formar un registro de corrimiento se hace de manera automática con un PLC cuando se selecciona la función de registro de corrimiento.

Ejemplo 9

Dibujar un programa mediante un diagrama de escalera que proporcione la secuencia A+, B+, A–, B– para el sistema neumático que describe en la figura 13.17.

Respuesta

La figura 13.29 muestra el diagrama de escalera del programa con un registro de corrimiento. El grupo de relevadores internos que se usan para el registro son de RI1 hasta RI4. Cuando el interruptor de inicio se cierra, en el primer relevador del registro hay una entrada de 4-bits para dar 1 0 0 0. Cuando hay una entrada de cualesquiera de los interruptores límite, ocurre la operación de corrimiento. El relevador interno está ahí para asegurar que cada uno de los interruptores límite sólo produce un pulso de corta duración. De este modo, cuando el primer interruptor limite se cierra, el registro se convierte en 0 1 0 0; cuando el siguiente interruptor límite se cierra, el registro se convierte en 0 0 1 0; y cuando el siguiente interruptor se cierra, el registro se convierte en 0 0 0 1. Por lo tanto, cada una de las salidas se presenta en secuencia.

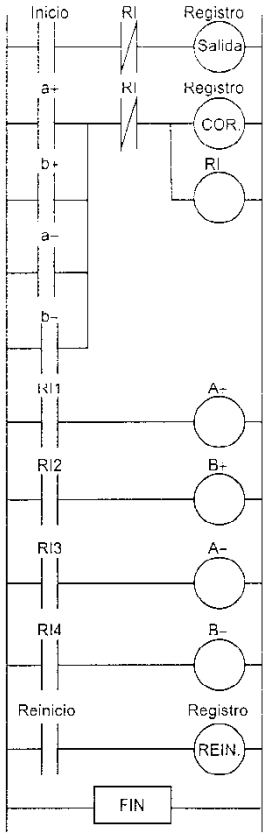


Figura 13.29 Ejemplo 9

Para mayores detalles relacionados con los controladores lógicos programables se sugieren los siguientes textos: *Programmable Logic Controllers* de W. Bolton (Newnes, Butterworth-Heinemann, 1996) y *Programmable Controllers: Operation and Application* de I.G. Warnock (Prentice Hall, 1988).

Problemas

1 Escribir los enunciados que describan la secuencia de operaciones que muestran las secciones de los diagramas de funciones de la figura 13.30.

2 Escribir los enunciados que describen la secuencia de operaciones que ilustran las secciones de los diagramas de funciones la figura 13.31.

3 Escribir los enunciados que describen la secuencia de operaciones que muestra la carta de tiempos de la figura 13.32.

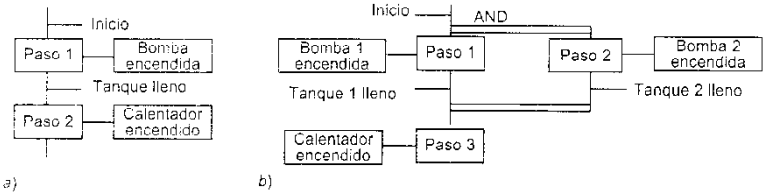


Figura 13.30
Problema 1

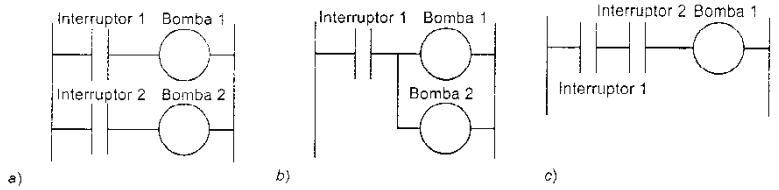


Figura 13.31
Problema 2

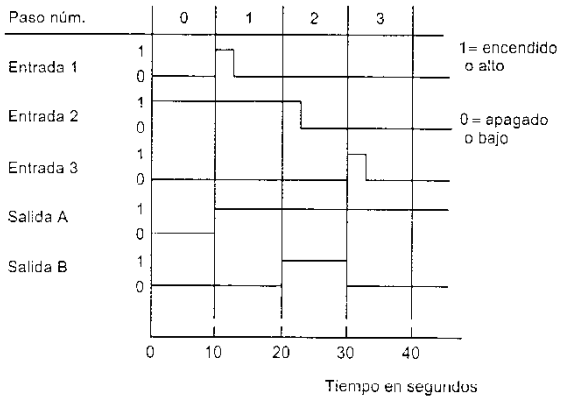


Figura 13.32 Problema 3

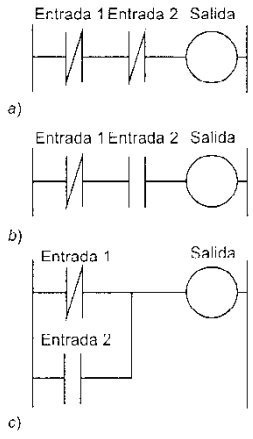


Figura 13.33 Problema 6

4 Explicar cómo se puede modificar el circuito neumático de la figura 13.6 para obtener una secuencia A+, B+, B–, A–.

5 Explicar cómo se puede modificar el circuito neumático que ilustra la figura 13.8 para dar una secuencia A+, B+, A–, B–.

6 ¿Cuáles son las condiciones que deben existir para que haya salidas para los escalones del diagrama de escalera que muestra la figura 13.33?

7 Dibujar los escalones de un diagrama de escalera de programas que se puedan usar en PLC para llevar a cabo las siguientes secuencias:
   a) Encender un motor con un interruptor de botón de presión de manera que el motor permanezca encendido hasta que se pulse otro interruptor de botón de presión.
   b) Encender un motor después de 30 s y otro después de 80 s.
   c) Encender una bomba por 10 s y apagarla.
   d) Encender una salida A después de la entrada de 5 pulsos y una salida B después de la entrada de 8 pulsos.
   e) Encender una lámpara de señalización cuando la bomba esté encendida y la señal de un medidor de presión también esté encendida para indicar una presión satisfactoria.
   f) Encender una lámpara de aviso si el nivel de agua empieza a derramarse y deja de enviar una señal de entrada o si la temperatura aumenta y el sensor de temperatura da una señal.

8 Para tres cilindros neumáticos, A, B y C, con válvulas e interruptores límite que detecten la extensión o retracción de cada uno de los pistones (un arreglo similar al de la figura 13.10), forme el diagrama de escalera de un programa que dé la secuencia A+ y B+ concurrentemente, C+, A– y B– concurrentemente, C–.

14 Control digital directo

Introducción

Una *computadora digital* consta de tres componentes principales: la unidad de procesamiento central (CPU por sus siglas en inglés: *central processing unit*), memoria para programas y datos, y el sistema de entrada/salida (I/O por sus siglas en inglés: *input/output*). La CPU controla el flujo de información entre los componentes y procesa los datos. En este capítulo se estudia el control digital directo mediante el uso de computadoras y en el capítulo 15, la transformada-*z*, un método para analizar estos sistemas.

Computadoras en control

El término *control digital directo* (DDC por sus siglas en inglés: *direct digital control*) se usa cuando la computadora está en lazo de realimentación o en lazos de sistemas de control (figura 14.1) e implementan la ley de control para el sistema. La computadora tiene como entradas el punto de ajuste requerido y la realimentación de la salida medida, la cual produce una salida que es la señal que maneja el elemento de corrección. Debido a que se trata de una computadora digital, las entradas y salidas son señales digitales. Si se requirieran señales analógicas, entonces habría una conversión usando convertidores analógico a digital para las entradas y convertidores digital a analógico para las salidas.

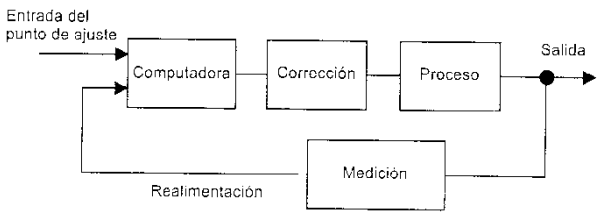


Figura 14.1 Control digital directo

La computadora podría programarse para realizar el control de procesos discretos, es decir, control de secuencia, y encendido o apagado de salidas de acuerdo con eventos o tiempo. Ésta se podría usar para control continuo, si la ley de control se implementa en la computadora a partir de un programa de software; este programa se diseña para lograr que la computadora ejecute las funciones matemáticas requeridas, por ejemplo, control PID.

El control digital directo se puede aplicar a sistemas de un solo lazo de realimentación o a sistemas grandes que involucran cientos de lazos de realimentación. Los lazos pueden estar en *cascada*, con la salida o señal de corrección de un lazo que actúa como el punto de ajuste para otro lazo; la figura 14.2 muestra la forma básica de dicho sistema en cascada.

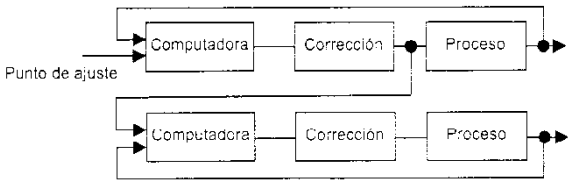


Figura 14.2 Control en cascada

Podría haber muchos interruptores condicionales para alterar las conexiones de las señales. Por ejemplo, podría haber varios sensores de temperatura en un proceso de temperatura controlada, cada uno con su propio lazo de realimentación a la computadora; el control se podría ejecutar de acuerdo con el lazo de realimentación, cuyo sensor indique la temperatura más alta — conmutado condicional.

El control digital directo no se limita a un control de sistemas con un solo lazo sino que se puede usar para implementar técnicas como control inferencial, control prealimentado y control adaptable.

Con el *control inferencial* el elemento de medición no realimenta la variable controlada; en su lugar, realimenta otra cantidad, a partir de la cual el controlador debe inferir el valor de la variable controlada. Por ejemplo, en el control de composición química en una planta de procesos químicos, la composición se puede inferir a partir de una medición de la temperatura del punto de ebullición.

El *control prealimentado* trabaja con base en la medición de las perturbaciones al sistema, no a través de la medición de las salidas (figura 14.3). Esto puede tener una respuesta más rápida que el control realimentado pues no se pierde tiempo en esperar a que el sistema reaccione a las perturbaciones antes de que el control se ejecute.

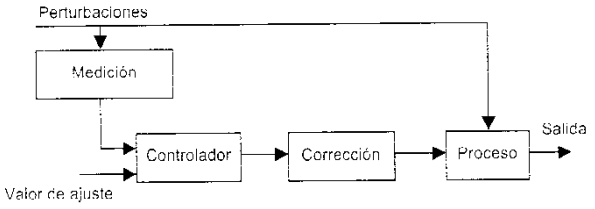


Figura 14.3 Control prealimentado

El *control adaptable* requiere que el sistema adapte en forma automática su estrategia de control para hacer frente a una situación. Los sistemas de control adaptable pueden hacerse de varias maneras; las tres más comunes son:

1 *Control mediante ganancia preprogramada*

Con el control mediante ganancia preprogramada (figura 14.4) los cambios en la ley de control elegida, como es la ganancia de una ley de control proporcional, se hacen con base en los cambios de alguna medición auxiliar de la variable controlada.

2 *Control mediante autosintonización*

Con autosintonización (figura 14.5) el sistema sintoniza de manera continua sus propios parámetros.

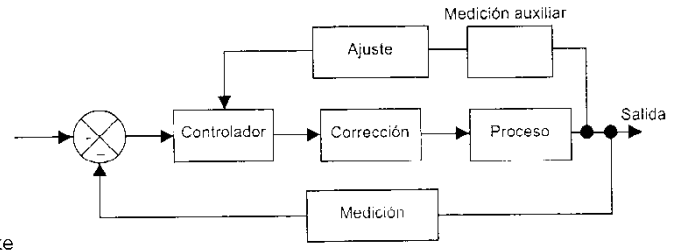


Figura 14.4 Control mediante ganancia preprogramada

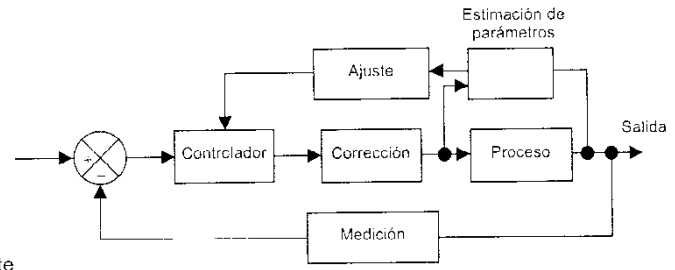


Figura 14.5 Control mediante autosintonización

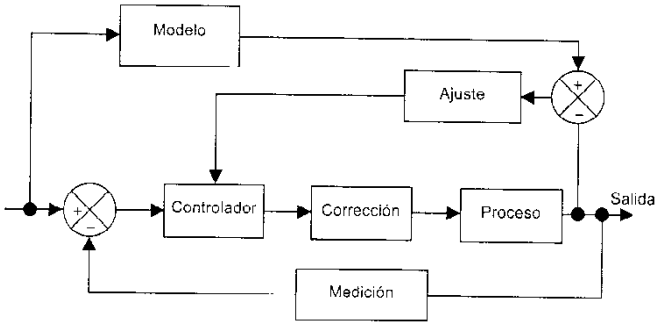


Figura 14.6 Control mediante un modelo de referencia

3 *Control mediante un modelo de referencia*

Con sistemas adaptables mediante un modelo de referencia (figura 14.6) se desarrolla un modelo exacto del sistema y el valor de ajuste se usa como entrada al sistema real y al modelo; la diferencia entre la salida real y la salida del modelo se monitorea y se usa para ajustar los parámetros del controlador.

Ejemplos de control digital directo

Siguiendo los ejemplos de sistemas de control descritos en el capítulo 12 para el control de motores, la figura 14.7 muestra cómo podría controlarse mediante computadoras la velocidad de los motores; las computadoras a menudo son sencillamente un microcontrolador.

En la figura 14.7*a* la señal de realimentación proviene de un tacogenerador que produce una señal analógica. De esta manera, antes de que la señal se pueda procesar por computadora, ésta se debe convertir a una señal digital mediante un convertidor analógico a digital. De igual manera, la salida de la computadora se debe convertir de digital a analógica mediante un convertidor de digital a analógico, así ésta puede controlar la velocidad del motor mediante el control de la corriente de armadura.

En la figura 14.7*b* la señal de realimentación proviene de un codificador, de modo que ésta es digital. Se necesita la conversión de código para ponerlo en forma adecuada para la entrada a la computadora.

En la figura 14.7*c* la velocidad del motor se controla mediante modulación por ancho de pulso. Ésta se puede controlar en forma directa desde la salida de la computadora, de modo que no se requiere convertidor de digital a analógico. Algunos microcontroladores, por ejemplo, el M68HC11, contienen en el chip circuitos que generan de manera directa la señal de modulación por ancho de pulso.

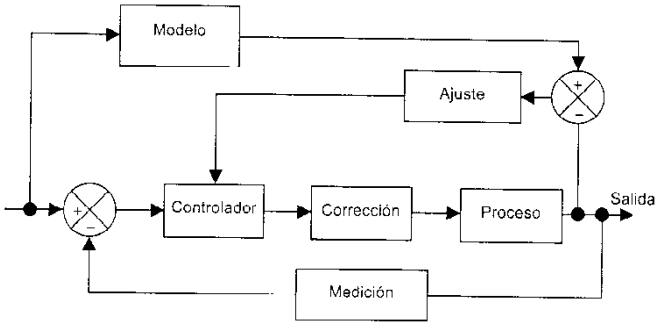


Figura 14.6 Control mediante un modelo de referencia

3 *Control mediante un modelo de referencia*

Con sistemas adaptables mediante un modelo de referencia (figura 14.6) se desarrolla un modelo exacto del sistema y el valor de ajuste se usa como entrada al sistema real y al modelo; la diferencia entre la salida real y la salida del modelo se monitorea y se usa para ajustar los parámetros del controlador.

Ejemplos de control digital directo

Siguiendo los ejemplos de sistemas de control descritos en el capítulo 12 para el control de motores, la figura 14.7 muestra cómo podría controlarse mediante computadoras la velocidad de los motores; las computadoras a menudo son sencillamente un microcontrolador.

En la figura 14.7*a* la señal de realimentación proviene de un tacogenerador que produce una señal analógica. De esta manera, antes de que la señal se pueda procesar por computadora, ésta se debe convertir a una señal digital mediante un convertidor analógico a digital. De igual manera, la salida de la computadora se debe convertir de digital a analógica mediante un convertidor de digital a analógico, así ésta puede controlar la velocidad del motor mediante el control de la corriente de armadura.

En la figura 14.7*b* la señal de realimentación proviene de un codificador, de modo que ésta es digital. Se necesita la conversión de código para ponerlo en forma adecuada para la entrada a la computadora.

En la figura 14.7*c* la velocidad del motor se controla mediante modulación por ancho de pulso. Ésta se puede controlar en forma directa desde la salida de la computadora, de modo que no se requiere convertidor de digital a analógico. Algunos microcontroladores, por ejemplo, el M68HC11, contienen en el chip circuitos que generan de manera directa la señal de modulación por ancho de pulso.

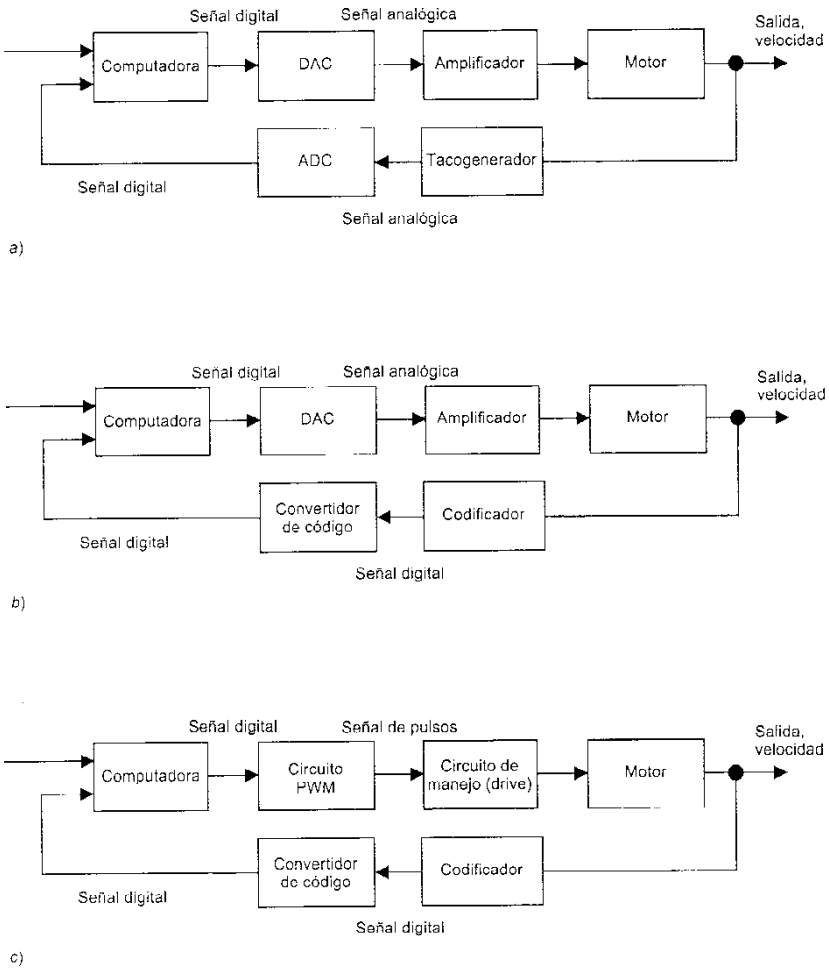


Figura 14.7 Control de velocidad para motor de cd

La figura 14.8 muestra un diagrama de flujo que describe el programa para los tipos de arreglo que muestra la figura 14.7. El valor de ajuste ingresa a la memoria de la computadora y se copia en otro lugar dentro de la misma, donde puede variar para convertirse en la entrada al sistema motor. La velocidad del motor se lee cada 0.5 s y el valor se compara con el valor de entrada al motor en la memoria de la computadora. Si el valor es menor, entonces el valor en memoria se incrementa; si es mayor, se reduce.

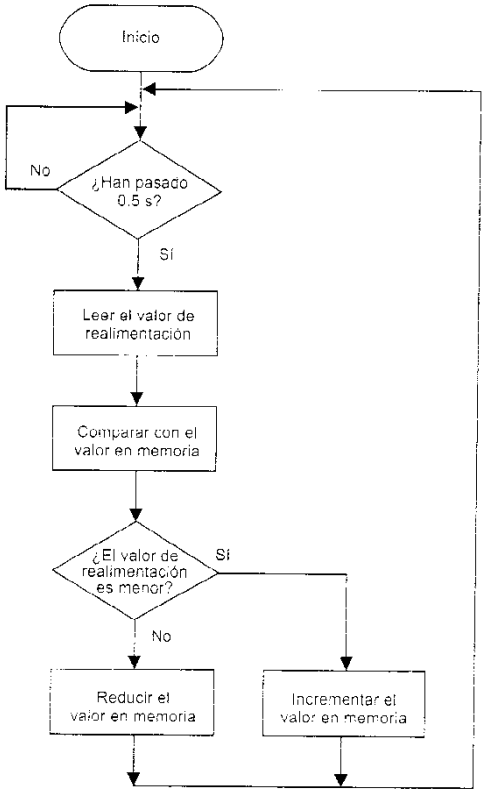


Figura 14.8 Diagrama de flujo para el programa

Problemas

1 Explicar qué significa *a*) control digital directo, *b*) control en cascada, *c*) control inferencial, *d*) control adaptable.

15 La transformada *z*

Introducción

Las computadoras digitales tienen entradas y salidas de señales que no son funciones del tiempo continuo sino una secuencia de pulsos. Una forma práctica de considerar estas señales es como señales continuas del tiempo que se han muestreado a intervalos regulares; las muestras, entonces, constituyen una secuencia en tiempo discreto. En efecto, esto podría ser como se han producido. Este capítulo trata el enfoque de muestreo para desarrollar la transformada *z*, una manera de determinar el comportamiento de sistemas sujetos a entradas de señales en tiempo discreto.

Sistemas de datos muestreados

Considere una forma de datos muestreados de un sistema de control donde se usa un microprocesador para implementar la acción de control (figura 15.1). La entrada al sistema es una señal analógica, la cual se convierte en una señal en tiempo discreto mediante un convertidor analógico a digital (ADC, por sus siglas en inglés: *analogue to digital converter*). El microprocesador aplica la ley de control o estrategia, como la determina su programa, y su salida se convierte entonces en una señal analógica mediante un convertidor digital a analógico (DAC por sus siglas en inglés: *digital to analogue converter*). La señal analógica resultante se puede usar para manejar la unidad de corrección y así controlar la planta variable.

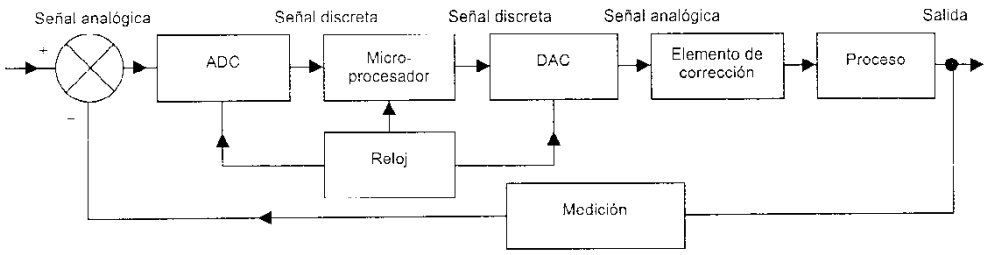


Figura 15.1 Sistema de datos muestreados

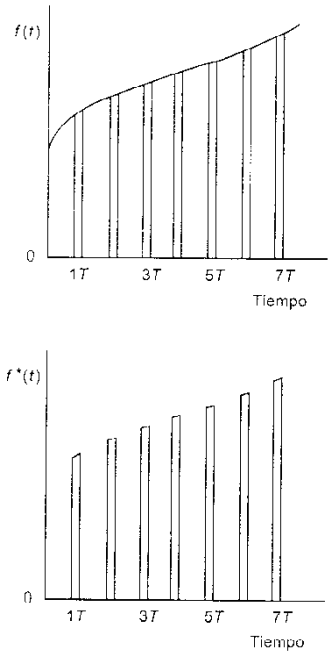


Figura 15.2 El proceso de muestreo

Un reloj alimenta un pulso cada T segundos. Cada vez que el ADC recibe un pulso, éste muestrea la señal de error; de esta manera, T es el *periodo de muestreo* (figura 15.2). La entrada al microprocesador es, entonces, una serie de pulsos. Para indicar qué señales varían de manera continua con el tiempo y cuáles son muestreadas, se usa un asterisco para todas éstas. Así, la señal antes del ADC se puede representar mediante $f(t)$, lo que indica que es una señal en tiempo continuo, mientras que después del ADC, cuando la señal se ha muestreado y convertido a una señal en tiempo discreto, la representación simbólica es $f^*(t)$.

Considere una señal en tiempo continuo, $f(t)$, que se muestrea en los tiempos $0, T, 2T, 3T, 4T$, etcétera (figura 15.2), donde T es el periodo de muestreo. Se toma el valor de $f(t)$ en un intervalo corto, Δt, lo suficientemente pequeño para que cada componente de la señal muestreada se considere de magnitud constante durante el tiempo que se toma la muestra. La salida, es de este modo, una serie de pulsos a intervalos regulares, y la altura del pulso en $0, T, 2T, 3T, 4T, \ldots, kT$ es una medida de la magnitud de la señal en tiempo continuo, $f(t)$, en ese tiempo. La serie de pulsos hasta cierto tiempo kT, se puede representar como

$$f(t=0), f(t=1T), f(t=2T), f(t=3T), \ldots, f(t=kT)$$

donde $f(t=0)$ es el valor de la función en $t=0$; $f(t=1T)$, el valor en $t=1T$, etcétera. De manera más concisa se puede escribir como

$$f(0), f(1T), f(2T), f(3T), \ldots, f(kT)$$

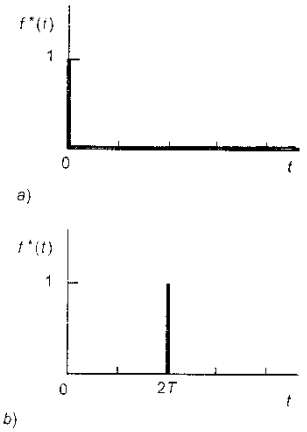


Figura 15.3 Impulsos unitarios en: *a*) $t=0$, y *b*) $t=2T$

donde k es un entero que indica el número en la secuencia de los impulsos.

El término matemático *secuencia* se usa para un conjunto de cantidades establecidas en orden definido. La secuencia se puede denotar como $f[kT]$, donde k sólo puede tomar valores enteros; observe que el uso de los corchetes [ ] es para distinguir ésta de la función de una cantidad que varía de manera continua. Es común denotar esta secuencia de señales digitales sólo como $f[k]$, con lo cual queda implícito el muestreo a intervalos regulares de T.

Considere una señal de entrada analógica que sólo es un impulso unitario en $t=0$. La salida muestreada se representa en la figura 15.3*a* y es un solo pulso en $t=0$. La secuencia de pulsos es, entonces

$$1, 0, 0, 0, \ldots, 0$$

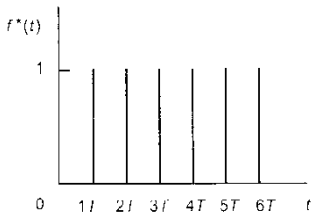


Figura 15.4 Escalón unitario

Un impulso unitario en $t = 0$ se puede denotar por $f[0]\delta(t)$. Puesto que $f[0] = 1$, esto es, $1\delta(t)$. Para un impulso en $t = 2T$ (figura 15.3*b*) la serie de pulsos es

$$0, 0, 1, 0, \ldots, 0$$

y se puede representar como $f[2T]\delta(t - 2T)$. El $\delta(t - 2T)$ indica que la función impulso $\delta(t)$ se presenta en $t = 2T$.

Para una función en tiempo continuo $f(t)$, la cual es un escalón unitario en $t = 0$ (figura 15.4), la serie de pulsos que produce es:

$$1, 1, 1, 1, \ldots, 1$$

Esta secuencia de impulsos es sólo la suma de los impulsos en $t = 0$, $t = 1T$, $t = 2T$, etcétera, y por ello se puede representar como

$$1\delta(t), 1\delta(t - 1T), 1\delta(t - 2T), 1\delta(t - 3T), \ldots$$

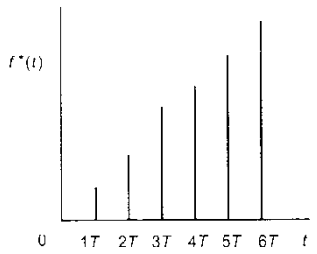


Figura 15.5 Rampa

Para una función en tiempo continuo, $f(t)$, la cual es una rampa con pendiente que se incrementa de 1 en 1 por cada periodo de muestreo (figura 15.5), la serie de pulsos que produce es

$$0, 1, 2, 3, \ldots, k$$

Esta secuencia de impulsos es sólo la suma de los impulsos en $t = 0$, $t = 1T$, $t = 2T$, etcétera, y por ello se puede representar como

$$0\delta(t), 1\delta(t - 1T), 2\delta(t - 2T), 3\delta(t - 3T), \ldots$$

Cualquiera que sea la forma de la función en tiempo continuo, la señal de datos muestreados es una serie de impulsos donde $f[0]$ se presenta en 0 y se escribe como $f[0]\delta(t)$, $f[1]$ es un impulso retrasado en un tiempo $1T$ y se escribe como $f[1]\delta(t - 1T)$, $f[2]$, un impulso retrasado en un tiempo $2T$ y se escribe como $f[2]\delta(t - 2T)$; $f[3]$, un impulso retrasado en un tiempo $3T$ y se escribe como $f[3]\delta(t - 3T)$, etcétera. De esta forma, la señal de datos muestreados se puede escribir como

$$f^*(t) = f[0]\delta(t) + f[1]\delta(t - 1T) + f[2]\delta(t - 2T) + f[3]\delta(t - 3T) + \ldots + f[k]\delta(t - kT) \quad [1]$$

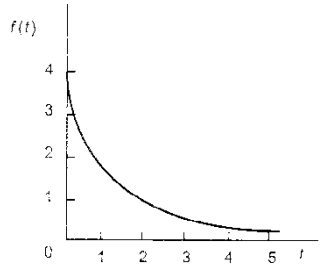


Figura 15.6 Ejemplo 1

Ejemplo 1

Para la señal en tiempo continuo que ilustra la figura 15.6, establecer los valores de los pulsos que producirían hasta $k = 3$ para un ADC con un periodo de muestreo, T, de 1 s.

Respuesta

En $k = 0$, es decir, $t = 0$, $f(t) = 4$. En $k = 1$, es decir, $t = 1T$, $f(t) = 2$. En $k = 2$, es decir, $t = 2T$, $f(t) = 1$. En $k = 3$, es decir, $t = 3T$, $f(t) = 0.5$. De esta manera, la señal en tiempo discreto es una serie de impulsos

$$4\,\delta(t), 2\,\delta(t - 1T), 1\,\delta(t - 2T), 0.5\,\delta(t - 3T), \ldots$$

Procesamiento de señales en tiempo discreto

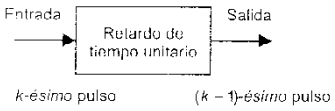


Figura 15.7 Retardo de tiempo unitario

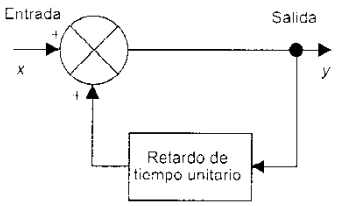


Figura 15.8 Diagrama de bloques con realimentación

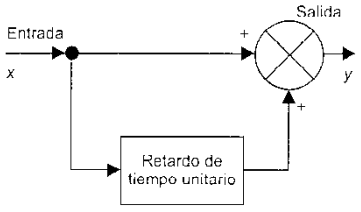


Figura 15.9 Diagrama de bloques con prealimentación

En un sistema de procesamiento de señales en tiempo discreto existe la entrada de una secuencia de pulsos y una salida de pulsos. En cierto instante la salida la calcula el sistema como resultado de procesar el pulso presente y los pulsos previos en la entrada y quizá los pulsos previos en la salida. Por ejemplo, en un instante particular se podría tener una entrada de pulsos $x[k]$ de una secuencia. El programa que se usa con el microprocesador podría leer este valor y adicionarlo al valor de salida previo $y[k-1]$ para dar la salida requerida, $y[k]$. Esta operación se puede representar mediante la ecuación

$$y[k] = y[k-1] + x[k] \qquad [2]$$

Dicha ecuación se denomina *ecuación en diferencias* y proporciona la relación entre la salida y la entrada para un sistema en tiempo discreto; es comparable a la ecuación diferencial que se usa con sistemas en tiempo continuo para relacionar la salida y la entrada.

Estas ecuaciones se pueden representar mediante diagramas de bloques que involucran bloques funcionales básicos de puntos suma, de amplificación y el de retardo de tiempo unitario; este último es el que tiene una entrada del *k-ésimo* pulso de una secuencia en tiempo discreto y una salida del pulso retardado, es decir, el $(k-1)$-*ésimo* pulso (figura 15.7).

La figura 15.8 muestra la representación mediante un diagrama de bloques de la ecuación [2]. La entrada, x, que es una señal discreta particular, $x[k]$, se adiciona a la salida, y, con un retardo de una unidad de tiempo, es decir, $y[k-1]$. El sistema es un sistema *realimentado*. La figura 15.9 describe un sistema prealimentado y representa la ecuación en diferencias:

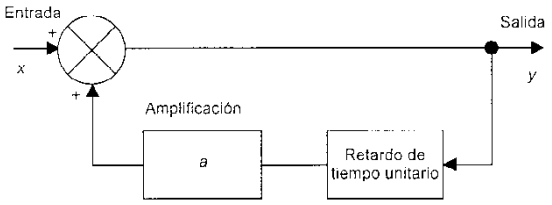


Figura 15.10 Diagrama de bloques con amplificación

$$y[k] = x[k] + x[k-1] \qquad [3]$$

La entrada, x, que es una señal discreta particular, $x[k]$, se adiciona a la entrada, x, con un retardo de una unidad de tiempo, es decir, $x[k-1]$. Para ilustrar el efecto de la amplificación, considere la ecuación [2] modificada a

$$y[k] = ay[k-1] + x[k]$$

donde a es algún número. El diagrama de bloques entonces se convierte en el que muestra la figura 15.10. La señal de realimentación de la salida con un retardo de una unidad de tiempo se amplifica mediante a antes de que ésta se adicione a la entrada.

La figura 15.11 ilustra el diagrama de bloques que representa la ecuación en diferencias:

$$y[k] = x[k] - ay[k-1] - by[k-2] \qquad [4]$$

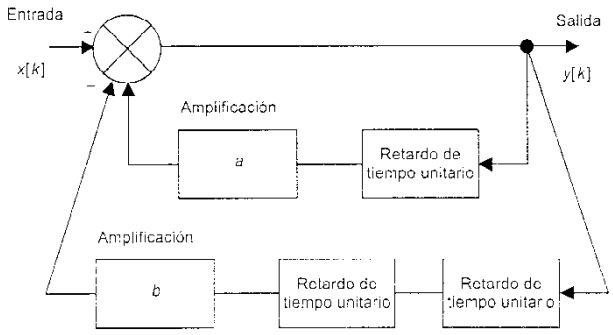


Figura 15.11 Diagrama de bloques de $y[k] - ay[k-1] - by[k-2]$

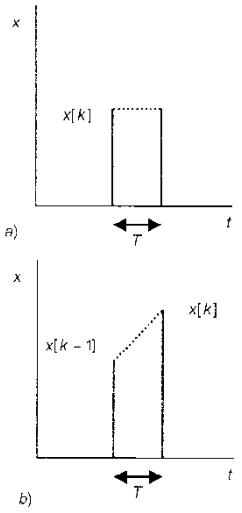


Figura 15.12 Integración: *a*) aproximación rectangular, *b*) aproximación trapezoidal.

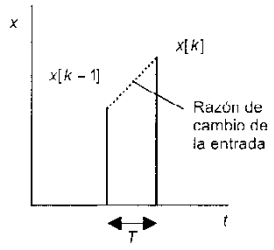


Figura 15.13 Gradiente

La entrada, $x[k]$, se sustrae de la señal de salida con un retardo de una unidad de tiempo, $y[k-1]$, multiplicada por a y la señal de salida con un retardo de dos unidades de tiempo, $y[k-2]$ multiplicada por b.

Se puede generar una ecuación en diferencias, que produce una salida similar a la salida que se obtiene al integrar la señal en tiempo continuo. Con la integración, el cambio en la salida de $y[k-1]$ a $y[k]$ se puede aproximar mediante el área, $Tx[k]$ (figura 15.12*a*), donde T es el periodo de muestreo. De esta manera, la aproximación en tiempo discreto a la integración está dada por la ecuación en diferencias

$$y[k] = y[k-1] + Tx[k] \qquad [5]$$

Una mejor aproximación es considerar una área trapezoidal (figura 15.12*b*). El área es $\frac{1}{2}T(x[k-1]+x[k])$ y, de esta manera

$$y[k] = y[k-1] + \tfrac{1}{2}T(x[k-1]+x[k]) \qquad [6]$$

Ésta se conoce como *aproximación de Tustin*.

La diferenciación se puede aproximar al determinar el gradiente de la línea que une a dos muestras de entrada adyacentes (figura 15.13). De este modo, la salida, $y[k]$, es aproximadamente $(x[k]-x[k-1])/T$. Por lo tanto, la ecuación en diferencias que representa la diferenciación es

$$y[k] = (x[k]-x[k-1])/T$$

$$x[k] = x[k-1] + Ty[k] \qquad [7]$$

Ejemplo 2

Un proceso está definido mediante la ecuación en diferencias

$$y[k] = x[k] + y[k-1] - 0.5y[k-2]$$

Si la entrada es una onda senoidal muestreada, de modo que para $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ se tiene la secuencia de

$$0.5, 1.0, 0.5, -0.5, -1.0, -0.5, 0.5, 1.0, 0.5, -0.5, -1.0, -0.5, \text{etcétera}$$

donde todos los valores son cero para valores de k negativos, determinar la salida del sistema.

Respuesta

El valor de la salida $y[0]$ es $x[0] - y[-1] - 0.5y[-2]$. Suponga que antes de $x[0]$ no había salida, entonces se tiene que $y[0] = x[0] = 0.5$. El valor de la salida $y[1]$ es $x[1] + y[0] - 0.5y[-1] = 1.0 + 0.5 = 1.5$. El valor de la salida $y[2]$ es $x[2] + y[1] - 0.5y[0] = 0.5 + 1.5 - 0.25 = 1.75$. El valor de la salida $y[3]$ es $x[3] + y[2] - 0.5y[1] = -0.5 + 1.75 - 0.75 = 0.5$. Al continuar de esta manera se obtiene la secuencia de salida

0.5, 1.5, 1.75, 0.5, −1.37, −2.12, −0.94, 1.12, 2.09, 1.03, etcétera.

Retén de orden cero

La salida de un controlador digital es una señal digital codificada en binario que puede convertirse en una señal en tiempo continuo. Un convertidor digital a analógico (DAC) convierte una señal codificada en binario en impulso cuya magnitud está relacionada con el código binario. De esta manera, la entrada, que es una señal codificada en binario, se convierte en una secuencia de impulsos cuyo intervalo entre impulsos sucesivos es el tiempo de muestreo y sus magnitudes están relacionadas con la magnitud de la señal en los tiempos considerados. Una señal en tiempo continuo se reconstruye a partir de una señal en tiempo discreto mediante la retención del DAC del valor previo de un impulso hasta que llega el siguiente impulso convertido. El resultado es una señal analógica en forma de escalera (figura 15.14); los dispositivos que usan este método para producir una señal en tiempo continuo se los denominan *retén de orden cero* (ZOH por sus siglas en inglés: *zero-order hold*).

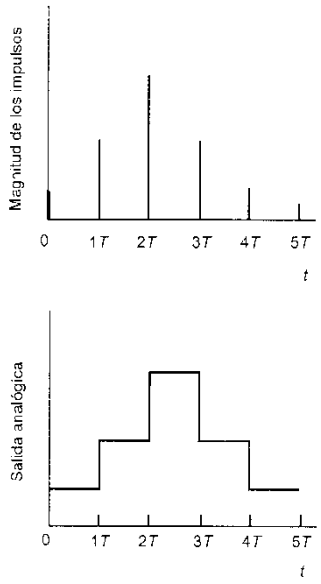


Figura 15.14 Salida analógica de un DAC con retén de orden cero

Con un retén de orden cero, con un impulso unitario como entrada da lugar a un pulso de magnitud unitaria cuyo ancho es el tiempo de muestreo, T (figura 15.15*a*). Dicho pulso se puede considerar como la suma de dos señales escalón; una de ellas inicia en $t = 0$ con altura positiva de 1 y otra que inicia en $t = T$ con altura negativa de 1 (figura 15.15*b*). Puesto que la transformada de Laplace de un escalón unitario es $1/s$ y uno que empieza con retardo de T unidades de tiempo, la transformada de Laplace del escalón con retardo se multiplica por e^{-sT} (vea el capítulo 4), así, la salida del elemento retén de orden cero es

$$\frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

Puesto que la entrada es un impulso unitario, la transformada de Laplace es 1, la función de transferencia, $G(s)$, para el retén de orden cero es

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \qquad [8]$$

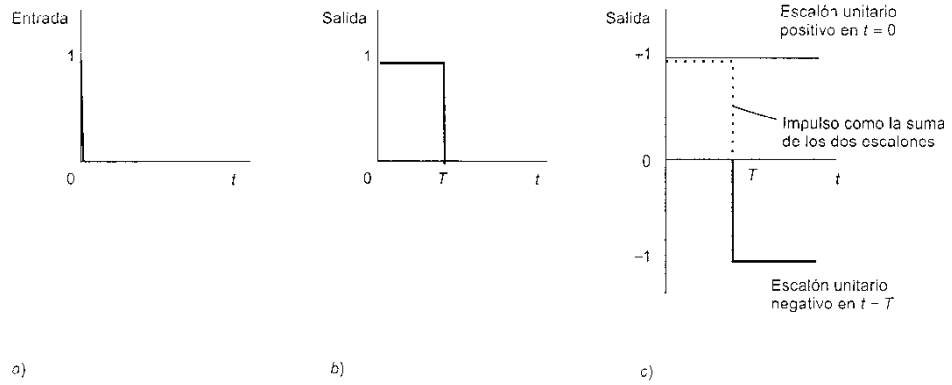


Figura 15.15 *a*) Entrada de impulso unitario a un ZOH, *b*) salida del ZOH, *c*) salida equivalente a dos escalones

La transformada z

La función que describe una secuencia de impulsos se puede escribir como (ecuación [1])

$$f^*(t) = f[0]\delta(t) + f[1]\delta(t-1T) + f[2]\delta(t-2T) + f[3]\delta(t-3T) + \ldots + f[k]\delta(t-kT)$$

La transformada de Laplace de un impulso en $t = 0$ es 1; en el tiempo $1T$, e^{-Ts}; en el tiempo $2T$, e^{-2Ts}, en el tiempo $3T$, e^{-3Ts}, etcétera. De esta manera, la transformada de Laplace de una función $f^*(t)$ muestreada es

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = F^*(s)$$

$$= f[0]1 + f[1]e^{-Ts} + f[2]e^{-2Ts} + f[3]e^{-3Ts} + \ldots + f[k]e^{-kTs}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f[k]\, e^{-kTs}$$

Si se hace $z = e^{Ts}$, es decir

$$s = \frac{1}{T}\ln z \qquad [9]$$

entonces la ecuación anterior se puede escribir como

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = F(z) = f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + f[3]z^{-3} + \ldots + f[k]z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f[k] z^{-k} \qquad [10]$$

$F^*(s)$, con $s = (1/T) \ln z$, se denomina *transformada z* de la secuencia de impulsos y se escribe como $\mathcal{Z}\{f(k)\} = F(z)$. Observe que cada periodo de retardo da como resultado un impulso que se multiplica por z^{-1}.

Considere la transformada z de un *escalón unitario muestreado* (figura 15.16), el cual tiene $f(t) = 1$ para todos los valores de t mayores que 0. De esta forma, según la ecuación [10]

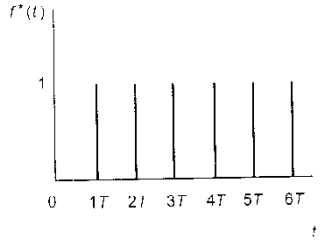


Figura 15.16 Función escalón unitario muestreada

$$F(z) = f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + f[3]z^{-3} + \ldots$$

$$= 1z^{0} + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 1z^{-3} + \ldots \qquad [11]$$

Esta serie se puede expresar en *forma cerrada*. La ecuación [11] es una serie geométrica de la forma $1 + x + x^2 + \ldots$ con la suma hasta infinito, dado que la serie converge (es decir, $|x| < 1$) a $1/(1-x)$. De esta manera, si se escribe $1/z$ en lugar de x

$$F(z) = \frac{1}{1 - (1/z)} = \frac{z}{z-1} \qquad [12]$$

dado que $|z| > 1$.

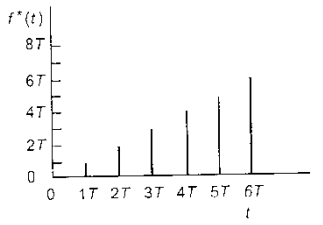


Figura 15.17 Rampa muestreada

Considere la transformada z de una *función rampa muestreada*, $f(t) = t$ (figura 15.17). La ecuación [10] da como resultado

$$F(z) = 0 + Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \ldots$$

Esto se puede escribir como

$$\frac{zF(z)}{T} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \ldots \qquad [13]$$

Se puede usar el teorema binomial de $(1-x)^{-2}$ para obtener una serie de la forma $1 + 2x + 3x^2 + \ldots$. Por lo tanto, dado que $|z| > 1$, la ecuación [13] da por resultado

$$\frac{zF(z)}{T} = \frac{1}{(1 - 1/z)^2}$$

y así:

$$F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \qquad [14]$$

En análisis anteriores se consideró la transformada z para una señal en tiempo continuo muestreada cuando se conocía la función que describía la señal. Ahora se considera la transformada z para una *señal en tiempo discreto*, la cual sólo se especifica en términos de una secuencia de pulsos regularmente espaciados. Considere la secuencia 1, 1, 1, 1, 1, 1, ... la cual se puede escribir como $f[k] = 1$. La transformada z es la suma de las transformadas de la secuencia de impulsos. De esta forma, con base en la ecuación [10]:

$$F(z) = f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + f[3]z^{-3} + \dots$$
$$= 1z^{0} + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 1z^{-3} + \dots \qquad [15]$$

Esta serie se puede expresar en *forma cerrada*. La ecuación [15] es una serie geométrica de la forma $1 + x + x^2 + \dots$ con la suma hasta infinito, dado que la serie converge (es decir, $|x| < 1$) a $1/(1-x)$. De esta manera, si se escribe $1/z$ en lugar de x

$$F(z) = \frac{1}{1-(1/z)} = \frac{z}{z-1} \qquad [16]$$

dado que $|z| > 1$.

Suponga que en lugar de la secuencia 1, 1, 1, 1, 1, ... se tuviera 0, 1, 1, 1, 1, ..., la transformada z sería:

$$F(z) = f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + f[3]z^{-3} + \dots$$
$$= 0z^{0} + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 1z^{-3} + \dots \qquad [17]$$

Ésta sólo es la transformada z de 1, 1, 1, 1, 1, ... multiplicada por z^{-1}. Por lo tanto, puesto que 0, 1, 1, 1, 1, ... sólo es 1, 1, 1, 1, 1, ... retardada por un intervalo de muestreo, la multiplicación por z^{-1} denota el retardo de un intervalo de muestreo.

Considere la transformada z de una *señal en tiempo discreto* dada por la secuencia $a^0, a^1, a^2, a^3, \dots$, es decir, $f[k] = a^k$, donde a es una constante. La transformada z es la suma de las transformadas de la secuencia de impulsos. De esta manera, con la ecuación [10]

$$F(z) = f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + f[3]z^{-3} + \dots$$
$$= a^{0} + a^{1}z^{-1} + a^{2}z^{-2} + a^{3}z^{-3} + \dots \qquad [18]$$

Esta serie se puede expresar en *forma cerrada*. La ecuación [18] es una serie geométrica de la forma $1 + ax + a^2x^2 + \ldots$ con la suma hasta infinito, dado que la serie converge (es decir, $|x| < 1$) a $1/(1 - ax)$. Por lo tanto, si se escribe $1/z$ en lugar de x

$$F(z) = \frac{1}{1 - a(1/z)} = \frac{z}{z - a} \qquad [19]$$

dado que $|z| > a$.

Ejemplo 3

Determinar la transformada z de las siguientes señales en tiempo discreto

a) 0, 0, 1, 1, y todos los valores que siguen son 1

b) 0, 2, 5, 1, y todos los valores que siguen son 0

Respuesta

a) Éste es un escalón unitario que inicia en $t = 2T$. Retardar una señal en tiempo discreto mediante un intervalo de muestreo significa multiplicarla por z^{-1}. De este modo, retardarla dos intervalos de muestreo significa multiplicarla por z^{-2}. Debido a que la transformada z para un escalón unitario que inicia en $t = 0$ es $z/(z - 1)$, la solución es $z/z^2(z - 1) = 1/z(z - 1)$. También se podría haber derivado a través de la ecuación [10].

b) Al usar la ecuación [10] se obtiene

$$\begin{aligned} F(z) &= f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + f[3]z^{-3} + \ldots \\ &= 0z^0 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 1z^{-3} + 0 \end{aligned}$$

Uso de la transformada z

Las tablas 15.1 y 15.2 proporcionan las transformadas z de funciones muestreadas y secuencias encontradas en forma común. Algunas de las propiedades básicas de las transformadas z son.

1 *Linealidad*
La transformada z de la suma de dos secuencias, $f[k]$ y $g[k]$, es la suma de las transformadas z de las secuencias cuando se consideran por separado

$$\mathcal{Z}\{f[k] + g[k]\} = \mathcal{Z}\{f[k]\} + \mathcal{Z}\{g[k]\}$$

Tabla 15.1 Transformadas z

$f(t)$ *muestreada, periodo de muestreo* T	$F(z)$
Impulso unitario, $\delta(t)$	1
Impulso unitario retardado por kT	z^{-k}
Escalón unitario, $u(t)$	$\dfrac{z}{z-1}$
Escalón unitario retardado por kT	$\dfrac{z}{z^k(z-1)}$
Rampa unitaria, t	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$
t^2	$\dfrac{T^2z(z-1)}{(z-1)^3}$
e^{-at}	$\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$
$1-e^{-at}$	$\dfrac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
te^{-at}	$\dfrac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$e^{-at}-e^{-bt}$	$\dfrac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
$\operatorname{sen}\omega t$	$\dfrac{z\operatorname{sen}\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$e^{-at}\operatorname{sen}\omega t$	$\dfrac{ze^{-aT}\operatorname{sen}\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{z(z-e^{-aT}\cos\omega T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$

Tabla 15.2 Transformadas z

$f[k]$	$f[0], f[1], f[2], f[3], \ldots$	$F(z)$
$1u[k]$	$1, 1, 1, 1, \ldots$	$\dfrac{z}{z-1}$
a^k	$a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots$	$\dfrac{z}{z-a}$
k	$0, 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
ka^k	$0, a^1, 2a^2, 3a^3, \ldots$	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$
ka^{k-1}	$0, a^0, 2a^1, 3a^2, \ldots$	$\dfrac{z^2}{(z-a)^2}$
e^{-ak}	$e^0, e^{-a}, e^{-2a}, e^{-3a}, \ldots$	$\dfrac{z}{z-e^{-a}}$

La transformada z de una secuencia multiplicada por una constante es la misma transformada z de la secuencia multiplicada por la constante

$$\mathcal{Z}\{af[k]\} = a\mathcal{Z}\{f[k]\}$$

Ejemplo 4

Determinar la transformada z de la función $f(t) = t + e^{-t}$ cuando ésta se muestrea cada 1 s.

Respuesta

A partir de la propiedad de linealidad y la tabla 15.1 con $T = 1$ s, puesto que la transformada z de la función t muestreada es $Tz/(z-1)^2$ y la de la función e^{-t}, $z/(z-e^{-T})$

$$\mathcal{Z}\{(t + e^{-t}) \text{ muestreada}\} = \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-e^{-1}}$$

Ejemplo 5

Determinar la transformada z de la secuencia $f[k] = k + e^{-k}$.

Respuesta

Con base en la propiedad de linealidad y la tabla 15.2:

$$\mathcal{Z}\{k - e^{-k}\} = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-1}}$$

2 *Teoremas de corrimiento*

Si $f[k]$ es una secuencia y $F(z)$ es su transformada z, entonces la transformada z de la secuencia adelantada por n intervalos de muestreo, es decir, recorrida a la izquierda para dar $f[k+n]$, está dada por

$$\mathcal{Z}\{f[k+n]\} = z^n F(z) - (z^n f[0] + z^{n-1} f[1] + z^{n-2} f[2] + \ldots + zf[n-1])$$

Si $n = 1$, entonces

$$\mathcal{Z}\{f[k+1]\} = zF(z) - zf[0]$$

Si $n = 2$, entonces:

$$\mathcal{Z}\{f[k+2]\} = z^2F(z) - z^2f[0] - zf[1]$$

Si la función $f(t)u(t)$ muestreada se recorre a la derecha, es decir, se retrasa por n intervalos de muestreo, entonces la transformada z de la función muestreada recorrida está dada por

$$\mathcal{Z}\{f[k-n]u[k-n]\} = z^{-n}F(z)$$

Los teoremas de corrimiento indican que se puede pensar en z como si fuera un *operador de corrimiento en el tiempo*. La multiplicación por z equivale a un adelanto en el tiempo de un intervalo de muestreo; la división entre z equivale a un retardo de un intervalo de muestreo.

Ejemplo 6

Determinar la transformada z de la secuencia en tiempo discreto 0, 0, 1, 2, 3, 4, etcétera.

Respuesta

Ésta es la secuencia 0, 1, 2, 3, 4, ... retardada un intervalo. Como indica la tabla 15.2, la señal no retardada tiene la transformada z, $z/(z-1)^2$ y, de esta manera, según el teorema de corrimiento anterior, la secuencia retardada tendrá la transformada z, $z^{-1}z/(z-1)^2 = 1/(z-1)^2$.

De manera alternativa, el problema se podría considerar desde los primeros principios y determinar la transformada z de cada uno de los impulsos y, por lo tanto, la forma cerrada de la secuencia. El resultado es el mismo.

3 *Translación compleja*

La transformada z de la función $f(t)$ muestreada cuando se multiplica por e^{-at} origina la sustitución de ze^{aT} por z en la transformada z de la función $f(t)$ muestreada, es decir

$$\mathcal{Z}\{e^{-akT}f[k]\} = F(e^{aT}z)$$

donde $F(z)$ es la transformada z de $f[k]$.

Ejemplo 7

Determinar la transformada z de la función te^{-at} muestreada.

Respuesta

Con base en la propiedad de la translación compleja y al sustituir ze^{aT} por z en la transformada de t se obtiene:

$$\frac{Tze^{aT}}{(ze^{aT}-1)^2}=\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$$

4 *Teoremas del valor inicial y del valor final*
El teorema del valor inicial proporciona el valor de la función del tiempo cuando $t=0$, es decir, la condición inicial. Este teorema es

$$f[0]=\lim_{t\to 0} f[k]=\lim_{z\to\infty} F(z)$$

El teorema del valor final da, siempre que exista el límite, el valor que tiene la función a medida que el tiempo tiende a un valor infinito, es decir, la condición en estado estable. Este teorema es

$$f[\infty]=\lim_{t\to\infty} f[k]=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F(z)$$

Ejemplo 8

Determinar los valores inicial y final de la secuencia en tiempo discreto que tiene la transformada $F(z)=z^2/(z-1)(z-0.5)$.

Respuesta
Se puede escribir la transformada como

$$\frac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}=\frac{1}{1-1.5/z+0.5/z^2}$$

Entonces, según el teorema del valor inicial, a medida que $z\to\infty$ se tiene que $f[0]=1$.
El teorema del valor final da como resultado

$$f[\infty]=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z}{z-0.5}=2$$

Transformada z inversa

La obtención de la secuencia de señales en tiempo discreto o de funciones muestreadas que se representan mediante la transformada z se llama obtención de la *transformada z inversa*. Si $\mathcal{Z}\{f^*(t)\}=F(z)$ o $\mathcal{Z}\{f[k]\}=F(z)$, entonces la transformada z inversa se representa por $\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$. La inversa se puede obtener de varias maneras.

1 *Usando tablas*
Esta requiere usar las tablas de las transformadas, tablas 15.1 y 15.2, y sus propiedades a fin de reconocer la función del tiempo, la cual dará lugar a una transformada en particular.

Ejemplo 9

Determinar la transformada inversa de $2z/(z-1)$.

Respuesta

La función escalón unitario tiene la transformada z, $z/(z-1)$ y por lo tanto, la inversa es justo una función escalón de altura 2. De modo alternativo se podría reconocer que las series en tiempo discreto de 1, 1, 1, 1, ... dan la transformada z, $z/(z-1)$ y, así, la inversa es la secuencia 2, 2, 2, 2, 2, ...

2 *Fracciones parciales*
Ésta necesita el uso de las fracciones parciales para simplificar la transformada z y ponerla en tal forma que se pueda reconocer en términos de transformadas estándar.

Ejemplo 10

Determinar la transformada inversa de $F(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-0.5)}$.

Respuesta

A pesar de que las fracciones parciales de la expresión anterior se podrían determinar de manera directa, el procedimiento que con mayor frecuencia conduce a formas estándar es obtener las fracciones parciales de $F(z)/z$. De esta manera

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.5}$$

$(z-0.5)A + (z-1)B = 1$ y así $A = 2$ y $B = -2$. De esta forma:

$$F(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{2z}{z-0.5}$$

El primer término tiene $z/(z-1)$, que es la transformada z de un escalón unitario muestreado o de una secuencia en tiempo discreto 1, 1, 1, 1, ... El segundo término tiene la forma $z/(z-a)$, que es la transformada z de $a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots$ o a^k. De esta forma, la transformada inversa es

$$f[k] = 2u[k] - 2 \times 0.5^k$$

que es la secuencia en tiempo discreto 0, 1, 1.5, 1.75, ...

3 *Expansión como una serie de potencias mediante división larga*
Ésta pone la transformada en una serie de potencias mediante la división larga del numerador entre el denominador.

Ejemplo 11

Determinar la transformada inversa de $F(z) = \dfrac{2z}{z^2 + z + 1}$.

Respuesta

Con base en la división larga para expandir ésta como una serie de potencias

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2z^{-1} - 2z^{-2} + 2z^{-4} - 2z^{-5} + \ldots \\
\hline
z^2 + z + 1 & 2z \\
 & \underline{2z + 2z^{0} + 2z^{-1}} \\
 & \quad -2z^{0} - 2z^{-1} \\
 & \quad \underline{2z^{0} \quad 2z^{-1} - 2z^{-2}} \\
 & \qquad\qquad 2z^{-2} \\
 & \qquad\qquad \underline{2z^{-2} + 2z^{-3} + 2z^{-4}} \\
 & \qquad\qquad\quad -2z^{-3} - 2z^{-4} \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{-2z^{-3} - 2z^{-4} - 2z^{-5}} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 2z^{-5}
\end{array}
$$

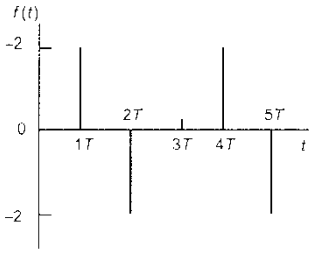


Figura 15.18 Ejemplo 11

De esta manera, $F(z)$ se puede representar mediante $F(z) = 0z^{0} + 2z^{-1} - 2z^{-2} + 0z^{-3} + 2z^{-4} - 2z^{-5} - \ldots$ y ésta es la secuencia en tiempo discreto 0, 2, −2, 0, 2, −2,... (figura 15.18).

Ejemplo 12

Determinar la secuencia en tiempo discreto dada la transformada z, $5/(z+1)$.

Respuesta

Según la división larga

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5z^{-1} - 5z^{-2} + 5z^{-3} - 5z^{-4} + \ldots \\
\hline
z + 1 & 5 \\
 & \underline{5 + 5z^{-1}} \\
 & \quad -5z^{-1} \\
 & \quad \underline{-5z^{-1} \quad 5z^{-2}} \\
 & \qquad\qquad 5z^{-2} \\
 & \qquad\qquad \underline{5z^{-2} + 5z^{-3}} \\
 & \qquad\qquad\quad -5z^{-3} \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{-5z^{-3} - 5z^{-4}} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 5z^{-4}
\end{array}
$$

De esta manera, $F(z) = 0z^{0} + 5z^{-1} - 5z^{-2} + 5z^{-3} - 5z^{-4} + \ldots$, y, así, la secuencia en tiempo discreto es 0, 5, −5, 5, −5, ...

Función de transferencia pulso

Para un sistema que da una salida con una transformada z de $Y(z)$ para una entrada con una transformada z de $X(z)$, la *función de transferencia pulso* $G(z)$ se define como

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \qquad [20]$$

cuando no hay valores diferentes de cero almacenados en los elementos antes del tiempo inicial.

Ejemplo 13

Determinar la función de transferencia pulso para el sistema de procesamiento en tiempo discreto que tiene la ecuación en diferencias $y[k+2]+3y[k+1]-2y[k]=x[k]$.

Respuesta

Al tomar la transformada z:

$$z^2Y[z]+3zY[z]-2Y[z]=X[z]$$

Por lo tanto:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{z^2+3z-2}$$

Ejemplo 14

Determinar la respuesta a un impulso unitario de un sistema que tiene una función de transferencia pulso de $z/(z+1)(z+2)$.

Respuesta

Un impulso unitario tiene una transformada z de 1. De esta manera

$$Y(z)=G(z)X(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

Ésta se puede simplificar expandiéndola en las fracciones parciales o mediante la división larga. Al usar la división se obtiene

$$Y(z)=z^{-1}-3z^{-2}+7z^{-3}-15z^{-4}+\ldots$$

La transformada inversa de ésta proporciona la secuencia en tiempo discreto

$$y[k]=0, 1, -3, 7, -15, \ldots$$

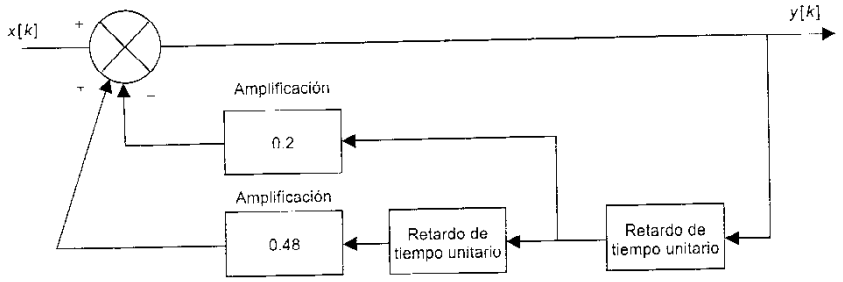


Figura 15.19 Ejemplo 15

Ejemplo 15

La figura 15.19 muestra un diagrama de bloques de un sistema en tiempo discreto. Determinar su respuesta a un impulso unitario.

Respuesta

La ecuación en diferencias dada por el diagrama de bloques es

$$y[k] = -0.2y[k-1] + 0.48y[k-2] + x[k]$$

Al tomar la transformada z de la ecuación, y según la propiedad de corrimiento en el tiempo, se obtiene

$$Y[z] = -0.2z^{-1}Y[z] + 0.48z^{-2}Y[z] + X[z]$$

De este modo

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + 0.2z^{-1} - 0.48z^{-2}}$$

Para un impulso unitario, $X(z) = 1$, y así, la salida está dada por

$$Y(z) = \frac{1}{1 + 0.2z^{-1} - 0.48z^{-2}}$$

Con base en la división larga se obtiene

$$Y[z] = 1 - 0.2z^{-1} + 0.88z^{-2} - 0.272z^{-3} + \ldots$$

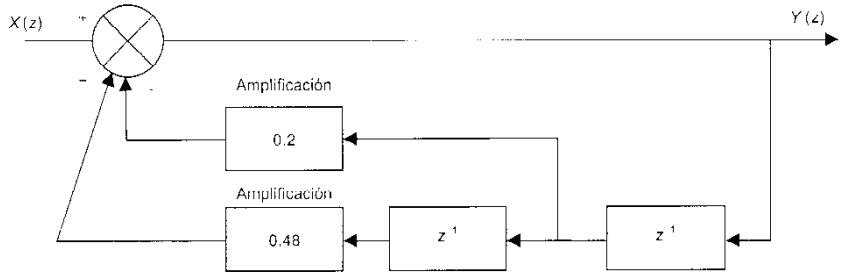


Figura 15.20 Ejemplo 15

Al tomar la transformada inversa da la secuencia en tiempo discreto

$$y[k] = 1, -0.2, 0.88, -0.272, \ldots$$

Observe que debido a que un retardo de tiempo unitario se representa mediante z^{-1}, cuando los diagramas de bloques se dibujan en el dominio de z, se usa este símbolo para representar el retardo de tiempo. De este modo, la figura 15.19 se podría redibujar como la figura 15.20.

Sistemas de datos muestreados

La figura 15.21*a* muestra la forma básica de un sistema de control en lazo cerrado en tiempo continuo y la figura 15.21*b*, la forma comparable al sistema de control en lazo cerrado en tiempo discreto. En este último, la entrada es una señal muestreada y la realimentación es la señal de la salida muestreada. Por lo tanto, el controlador tiene una entrada que es una señal en tiempo discreto. Su salida, una señal en tiempo discreto, pasa entonces a través de un sistema que es un retén de orden cero (ZOH), es decir, un DAC para dar una señal en tiempo continuo a la planta que se controla y la salida de ésta es una señal en tiempo continuo.

Considere primero la función de transferencia pulso para un arreglo en serie del elemento ZOH y la planta (figura 15.22). La entrada a la combinación es una señal de datos discretos y la salida, una señal en tiempo continuo. Para la realimentación se trata interesado con la forma muestreada de esta salida. El elemento ZOH tiene una función de transferencia de $(1 \quad e^{-Ts}) / s$ (ecuación [8]). De esta manera, si la planta tiene una función de transferencia $G_p(s)$, la función de transferencia de los dos elementos es

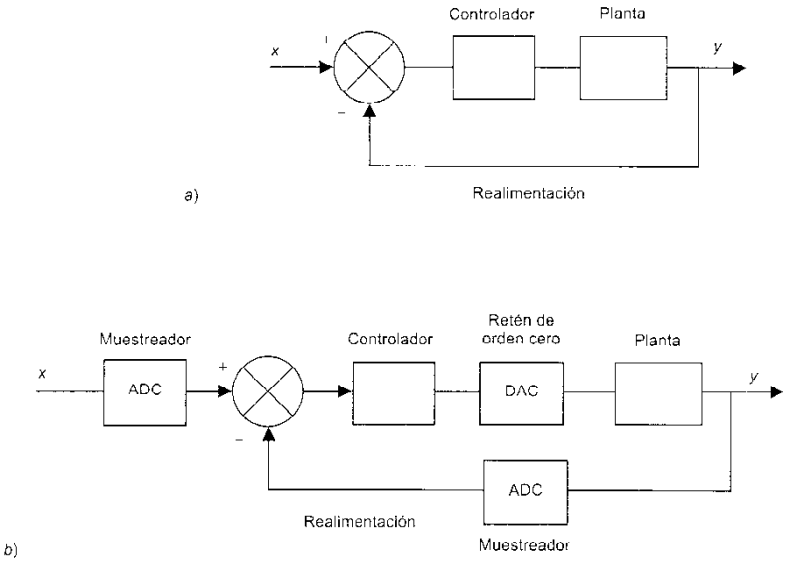


Figura 15.21 Control en lazo cerrado: *a*) tiempo continuo, *b*) tiempo discreto

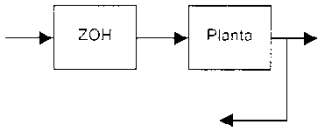


Figura 15.22 Parte del lazo de control digital

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s) \qquad [21]$$

Para obtener la salida muestreada de los elementos cuando hay una entrada muestreada, se necesita la función de transferencia pulso; esto es igual a decir que se necesita la transformada z de la respuesta de los elementos a una entrada impulso unitario. En el dominio de s la respuesta de los elementos a un impulso unitario es lo mismo que la función de transferencia. De este modo

$$G(z) = \text{transformada } z \text{ de } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s)\right\} \qquad [22]$$

Suponga que la planta tiene una función de transferencia de $1/s(s+1)$. Entonces

$$G(z) = \text{transformada } z \text{ de } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 - e^{-Ts}}{s^2(s+1)}\right\}$$

$$= \text{transformada } z \text{ de } \mathcal{L}^{-1}\left\{(1 - e^{-Ts})\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right)\right\}$$

La transformada inversa de Laplace de $1/s$ es una función escalón unitario con una transformada z de $z/(z-1)$. La transformada inversa de $1/s^2$ es una rampa de pendiente unitaria con una transformada z de $Tz/(z-1)^2$. La transformada inversa de $1/(s+1)$ es la exponencial e^{-t} con una transformada z de $z/(z-e^{-T})$. Puesto que e^{-Ts} es sólo el retardo de una muestra, el término $(1-e^{-Ts})$ es sólo un término referente al retardo y se puede transformar por separado. De esta manera

$$G(z) = (1-z^{-1})\left(\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}}\right)$$

Si $T = 1$ s, la ecuación anterior se puede simplificar para obtener

$$G(z) = \frac{ze^{-1} + 1 - 2e^{-1}}{(z-1)(z-e^{-1})} = \frac{0.37z + 0.26}{z^2 - 1.37z + 0.37} \qquad [23]$$

La respuesta de los elementos a un impulso unitario se puede obtener mediante la división larga como

$$0, 0.37, 0.77, 0.91, 0.97, \ldots$$

Ahora considere el sistema de control en lazo cerrado en tiempo discreto con control proporcional (figura 15.23). La señal de error de entrada $e[k]$ al controlador es

$$e[k] = x[k] - y[k]$$

La salida del controlador es $Ke[k] = Kx[k] - Ky[k]$. Ésta es la entrada a la combinación del elemento ZOH y la planta. Si éstos en conjunto tienen la transformada z de $G_{zohp}(z)$, entonces:

$$Y(z) = G_{zohp}(z)\{KX(z) - KY(z)\}$$

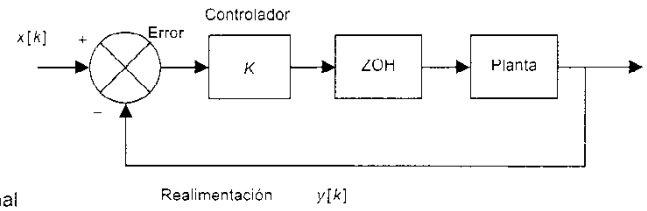


Figura 15.23 Control proporcional

Así, la función de transferencia pulso, $G(z)$, del sistema es

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{G_{\text{zohp}}(z)}{1 + KG_{\text{zohp}}(z)} \qquad [24]$$

Suponga que se tiene una planta, que es un sistema de primer orden con una función de transferencia $1/s(1+s)$. Puesto que $G_{\text{zoh}}(s) = (1 - e^{-Ts})/s$, entonces el producto de $G_p(s)$ y $G_{\text{zoh}}(s)$ es

$$G_p(s)G_{\text{zoh}}(s) - \frac{1 - e^{-Ts}}{s^2(s+1)} = (1 - e^{-Ts})\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right)$$

Ésta tiene la transformada z (como antes en esta sección)

$$\text{transformada } z \text{ de } \mathcal{L}^{-1}\{G_p(s)G_{\text{zoh}}(s)\} = \left(1 - \frac{1}{z}\right)\left(\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-T}}\right)$$

Con $T = 1$ s, ésta se simplifica a

$$\text{transformada } z \text{ de } \mathcal{L}^{-1}\{G_p(s)G_{\text{zoh}}(s)\} = \frac{0.37z + 0.26}{z^2 - 1.37z + 0.37}$$

Con $K = 1$ se obtiene una función de transferencia pulso para el sistema de

$$G(z) = \frac{0.37z + 0.26}{z^2 - 1.37z + 0.37 + 0.37z + 0.26} = \frac{0.37z + 0.26}{z^2 - z + 0.63}$$

Ahora considere un impulso unitario como entrada al sistema en lazo cerrado; puesto que la transformada z de la entrada es 1, entonces

$$\text{Salida}(z) = \frac{0.37z + 0.26}{z^2 \quad z + 0.63}$$

Por lo tanto, según la división larga para obtener la inversa

$$\text{Salida}(z) = 0.37z^{-1} + 0.63z^{-2} + 0.40z^{-3} - 0.25z^{-5} + \ldots$$

así, la salida es la secuencia en tiempo discreto

$$0, 0.37, 0.63, 0.40, 0, -0.25, \ldots$$

Sin embargo, puesto que la salida es la señal antes del elemento ZOH, ésta toma la forma que muestra la figura 15.24.

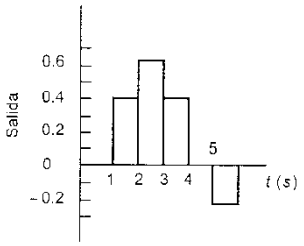


Figura 15.24 Salida

Conversión de las leyes de control analógicas

Si se quiere convertir un sistema de control analógico en un sistema de control digital, y se usan las mismas leyes de control, se necesita encontrar algoritmos que se aproximen a la función de transferencia, $G(s)$, del controlador analógico. Un algoritmo es un conjunto de operaciones matemáticas que se pueden escribir como instrucciones en los programas de computadora.

Como se indicó en la sección anterior, un control proporcional, $G(s) = K$, se puede convertir en $G(z) = K$. Si se tiene un control integral, entonces $G(s) = 1/s$. Para el control integral solo, la ecuación [5] muestra cómo se puede usar una ecuación en diferencias para aproximar la integración; así, la salida $y[k]$, a partir del controlador, es

$$y[k] = y[k-1] + Te[k]$$

Al tomar la transformada z se obtiene

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + Te(z)$$

y así

$$Y(z) = \frac{Tz}{(z-1)}e(z) \qquad [25]$$

Una mejor aproximación que a menudo se usa para la integración es la aproximación de Tustin (ecuación [6])

$$y[k] = y[k+1] + \tfrac{1}{2}T(e[k-1] + e[k])$$

Al tomar la transformada z se obtiene

$$Y(z) = \frac{T(z+1)}{2(z-1)}e(z) \qquad [26]$$

Por lo tanto, se puede considerar que en una conversión de control analógico a control digital se sustituye $Tz/(z-1)$ o $T(z+1)/2(z-1)$ en lugar de $1/s$, dependiendo de qué aproximación se use.

Si existe control derivativo, entonces se tiene $G(s) = s$. La ecuación [7] muestra cómo se puede usar una ecuación en diferencias para aproximar la diferenciación. Se usa el gradiente de la línea que une el valor actual del error y el valor previo del error para dar la derivada, es decir, salida$[k]$ = (error$[k]$ − error$[k-1]$)$/T$ y así

$$Y(z) = \frac{z-1}{Tz}e(z) \qquad [27]$$

De esta manera, en una conversión de control analógico a control digital $(z-1)/Tz$ se puede sustituir en lugar de s.

Considere un sistema con control PID y una ley de control analógico de (ecuación [16] del capítulo 10)

$$G(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s \qquad [28]$$

Las ganancias de los elementos proporcional, integral y derivativo son K_p, K_i y K_d. Entonces el controlador digital equivalente es, según las ecuaciones [25] y[27]

$$G(z) = K_p + K_i \frac{Tz}{z-1} + K_d \frac{z-1}{Tz} \qquad [29]$$

En términos de la constante de tiempo integral, $\tau_i = K_p/K_i$, y la constante de tiempo derivativa, $\tau_d = K_d/K_p$ (vea el capítulo 10), la ecuación [29] se puede escribir como:

$$G(z) = K_p\left\{1 + \frac{Tz}{(z-1)\tau_i} + \tau_d \frac{z-1}{Tz}\right\} \qquad [30]$$

Implementación de un algoritmo

La función de transferencia de un controlador discreto se puede convertir en un programa de computadora considerando la implementación de la ecuación en diferencias que representa la ley de control. Considere el control PID en la forma dada en la ecuación [29]. Ésta se puede escribir, para la salida del controlador, como

$$\text{Salida}(z) = \left(K_p + K_i \frac{Tz}{z-1} + K_d \frac{z-1}{Tz}\right) e(z)$$

donde $e(z)$ es la entrada. Al convertir en una ecuación en diferencias, el elemento proporcional da

$$\text{Salida}[k] = K_p e[k] \qquad [31]$$

Para el elemento integral, si ambos miembros de la ecuación se multiplican por $(1 - z^{-1})$:

$$(1 - z^{-1})\,\text{salida}(z) = K_i T e(z)$$

Y, de esta manera

$$\text{Salida}[k] - \text{salida}[k-1] = K_i T e[k] \qquad [32]$$

Para el elemento derivativo se puede escribir

$$\text{Salida}(z) = \frac{K_d}{T}(1 - z^{-1})e(z)$$

y de esta manera

$$\text{Salida}[k] = \frac{K_d}{T}(e[k] - e[k-1]) \qquad [33]$$

Por lo tanto, para el control PID las ecuaciones [31], [32] y [33] dan por resultado

$$\text{Salida}[k] = K_p e[k] + K_i T e[k] + \text{salida}[k-1] + \frac{K_d}{T}(e[k] - e[k-1]) \qquad [34]$$

Para implementar el algoritmo para el control PID, sólo se debe escribir un programa, en algún lenguaje apropiado, que use la ecuación [34] para calcular la salida del error que se presente en cualquier instante. De esta forma, la salida se obtiene al multiplicar el valor del error por K_p, adicionar el valor del error multiplicado por $K_i T$, sumar a éstas el valor previo de la salida, adicionar éstas el valor del error multiplicado por K_d/T y, por último, sustraer el valor previo del error multiplicado por K_d/T. De esta forma, el programa en pseudocódigo sería:

Inicialización
  es decir, fijar los valores iniciales de salida$[k-1]$ y $e[k-1]$, K_p, K_i, K_d y el periodo de muestreo, T
Lazo
  Restaurar el temporizador del intervalo de muestreo
  Input el error e
  Calcular la salida mediante la ecuación [34]
  Output el valor de la salida calculada
  Establecer salida$[k-1]$ = salida$[k]$ y $e[k-1] = e[k]$
  Esperar el término del intervalo de muestreo
Go to *Lazo*

Periodo de muestreo

La selección del periodo de muestreo, T, que se use con un controlador digital es importante. Un periodo de muestreo muy largo e información acerca de una planta que cambia las condiciones con rapidez representan una pérdida; si el periodo es muy corto y la carga computacional se incrementa, también aumenta la necesidad de un convertidor analógico a digital rápido. Lo anterior es una breve indicación de los problemas que involucra la elección del periodo de

muestreo que se use. Se han ideado varias reglas empíricas para elegir el periodo de muestreo:

1 Si la planta que se va a controlar tiene una constante de tiempo dominante, entonces se elige un periodo de muestreo que sea alrededor de un décimo de la constante de tiempo de la planta.

2 Suponga un modelo Ziegler-Nichols de la planta a partir de la curva de reacción (vea el capítulo 10 y la figura 10.16) y elija un periodo de muestreo que esté entre $0.05L$ y $0.3L$, donde L es el tiempo muerto (vea la figura 10.16).

Estabilidad

Un sistema realimentado lineal que trabaja con señales continuas es estable si todos los polos de la función de transferencia en lazo cerrado caen en el semiplano izquierdo del plano s (vea el capítulo 8). Esto significa que todas las raíces de la ecuación característica, es decir, el denominador de la función de transferencia, deben tener partes reales negativas. Puesto que una raíz s se puede representar como $s = \sigma + j\omega$, esto significa que σ debe ser negativa. Pero la ecuación [9] define a z como $z = e^{Ts}$, por lo tanto

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \qquad [35]$$

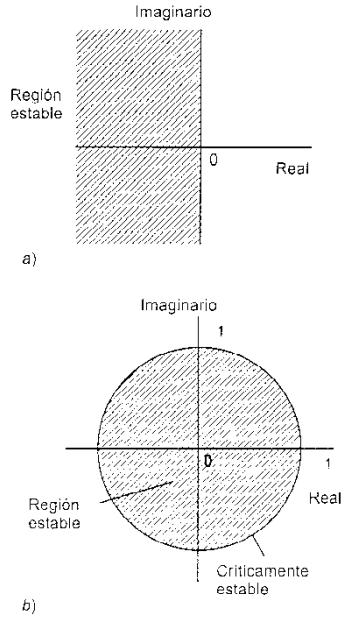


Figura 15.25 Regiones de estabilidad para los polos: *a*) plano *s*, *b*) plano *z*

Para la estabilidad en el plano s se debe tener σ como un número negativo, de modo que σT sea negativo. Esto sólo significa que $e^{\sigma T}$ tiene un valor entre 0 y 1. Debido a que $e^{\sigma T}$ es la magnitud de z, es decir, $|z|$, entonces la *condición para la estabilidad* en un sistema de datos muestreados es que todos los polos de la función de transferencia pulso en lazo cerrado deben caer dentro del círculo unitario, un círculo de radio 1 y centro en el origen (figura 15.25). Se dice que un sistema es *críticamente estable* si tiene un polo en el círculo.

Para ilustrar lo anterior, considere un sistema de datos muestreados en lazo cerrado con una función de transferencia pulso de

$$G(z) = \frac{0.37z + 0.26}{z^2 - z + 0.63}$$

Ésta tiene la ecuación característica

$$z^2 - z + 0.63 = 0$$

Las raíces de esta ecuación están dadas por

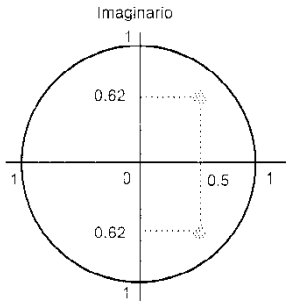


Figura 15.26 Estabilidad con $z = 0.50 \pm j0.62$

$$z = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4 \times 0.63}}{2} = 0.50 \pm j0.6$$

El sistema es, de este modo, estable debido a que las partes reales de todas las raíces son menores a 1, es decir, caen dentro del círculo de radio unitario en el plano z (figura 15.26).

La respuesta del sistema a una entrada depende de la localización de las raíces. Para raíces que caen dentro del círculo unitario, el sistema es estable y la respuesta a un impulso desaparece con el tiempo. Para raíces que caen fuera del círculo unitario, el sistema es inestable y la respuesta se incrementa con el tiempo. Para raíces reales dentro del círculo unitario, la respuesta a un impulso es justo una que decae de manera permanente en forma progresiva. Sin embargo, para raíces complejas dentro del círculo unitario, la respuesta es una que oscila y decrece. Para raíces reales en el círculo unitario, la respuesta a un impulso es una salida constante. Sin embargo, para raíces complejas en el círculo unitario, la respuesta a un impulso es una oscilación de amplitud constante. La figura 15.27 ilustra estos casos.

Ejemplo 16

Determinar si los sistemas de datos muestreados con las siguientes funciones de transferencia pulso son estables

$$a)\ G(z) = \frac{5z}{z(z\ \ 1)} \qquad b)\ G(z) = \frac{3z - 1}{3z^2 + 2z - 1}$$

$$c)\ G(z) = \frac{-2z + 1}{z^2 + 2z + 1.7} \qquad d)\ G(z) = \frac{-z + 0.6}{z^2 + 0.5z + 0.25}$$

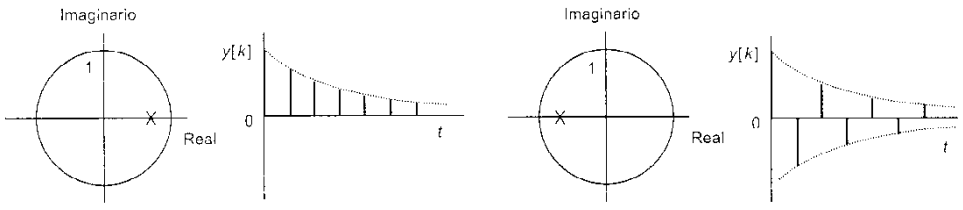
Respuesta

a) La ecuación característica es $z(z - 1) = 0$. Así, las raíces son 0 y 1. Debido a que una de las raíces cae en el círculo unitario, el sistema es críticamente estable.

b) La ecuación característica es $3z^2 + 2z - 1 = 0$. Por lo tanto, las raíces están dadas por

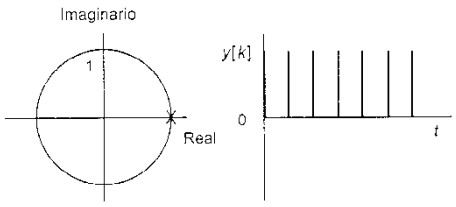
$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} - 0.33 + 0.66$$

Las raíces son -1 y 0.33. La raíz -1 caerá en el círculo unitario, así, el sistema es críticamente estable.

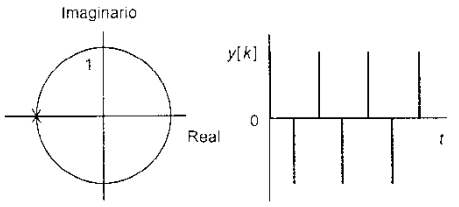


a) Salida de una secuencia geométrica que decae

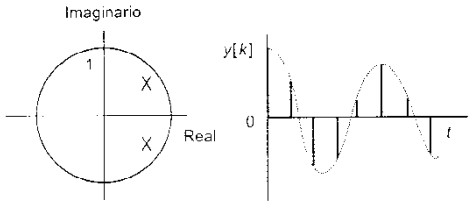
b) Salida de una secuencia geométrica que decae con signos alternados



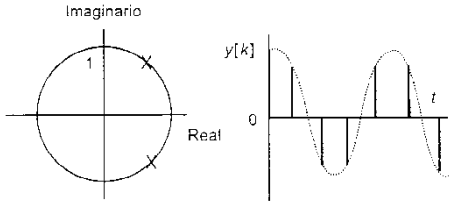
c) Salida de una secuencia constante



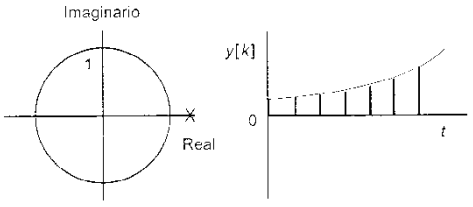
d) Salida de una secuencia constante con signos alternados



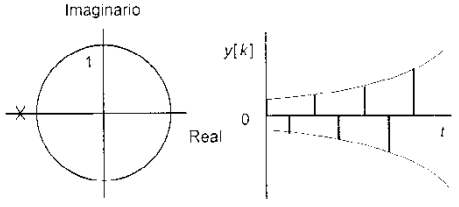
e) Salida de una secuencia senoidal que decae



f) Salida de una secuencia senoidal con amplitud constante



g) Salida de una secuencia geométrica creciente



h) Salida de una secuencia geométrica creciente con signos alternados

Figura 15.27 Efecto de la localización de las raíces en respuesta a una entrada impulso

c) La ecuación característica es $z^2 + 2z + 1.7 = 0$. Por lo tanto las raíces están dadas por:

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1.7}}{2} = -1 \pm j0.8$$

La raíz $-1 - j0.8$ está a una distancia radial de $\sqrt{1 + 0.8^2} = 1.3$ del origen. Por lo tanto, las raíces caen fuera del círculo unitario; así, el sistema es inestable.

d) La ecuación característica es $z^2 + 0.5z + 0.25 = 0$. Por lo tanto, las raíces están dadas por

$$z = \frac{-0.5 \pm \sqrt{0.25 - 1.00}}{2} = -0.25 \pm j0.43$$

La raíz $-0.25 - j0.43$ está a una distancia radial de $\sqrt{0.25^2 + 0.43^2} = 0.5$ del origen. Por lo tanto, las raíces caen en el interior del círculo unitario; así, el sistema es estable.

Ejemplo 17

Un sistema de datos muestreados como ilustra la figura 15.21 requiere un controlador proporcional unitario, un sistema de retención ZOH, una planta con una función de transferencia de K/s y realimentación unitaria. ¿Para qué valores de K el sistema será estable?

Respuesta

El elemento ZOH tiene una función de transferencia de $(1 - e^{-Ts})/s$. De este modo, la función de transferencia de la trayectoria directa es

$$\frac{K}{s^2}(1 - e^{-Ts})$$

La transformada z de ésta es:

$$\frac{KTz}{(z-1)^2}\frac{(z-1)}{z} = \frac{KT}{z-1}$$

La cual tiene como entrada el error $X(z) - Y(z)$ y la variable $Y(z)$ como salida. De esta manera

$$\frac{Y(z)}{X(z) - Y(z)} = \frac{KT}{z-1}$$

y la función de transferencia pulso para el sistema es:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{KT}{z - 1 + KT}$$

La ecuación característica es

$$z - 1 + KT = 0$$

o $z = 1 - KT$. La condición para la estabilidad es que z sea menor a ± 1. Si K se restringe a valores positivos, entonces KT debe ser menor a 2. La estabilidad crítica se tiene cuando $KT = 2$.

Pruebas para la estabilidad

La prueba de Routh-Hurwitz para la estabilidad, descrita en el capítulo 8 para sistemas en tiempo continuo, no se puede usar de manera directa con las raíces en el plano z debido a que la condición para la estabilidad es tal que todas tienen magnitudes dentro del círculo unitario y la prueba está diseñada para determinar si todas las raíces caen en el semiplano izquierdo del plano s. No obstante, si z se reemplaza por

$$z = \frac{1 + w}{1 - w} \qquad [36]$$

entonces, la condición para que todas las raíces z caigan dentro del círculo unitario se convierte en la que todas las raíces caigan en el semiplano izquierdo del plano w(figura 15.28); así, la prueba adopta el mismo formato que en la versión primaria para el plano s.

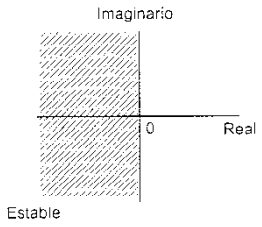


Figura 15.28 Regiones de la estabilidad para los polos en el plano w

Considere un ejemplo donde

$$G(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + 0.4z - 0.1}$$

Según la ecuación [36] y al reemplazar z

$$G(w) = \frac{2(1 + w)/(1 - w) + 1}{[(1 + w)/(1 - w)]^2 + 0.4(1 + w)/(1 - w) - 0.1}$$

$$= \frac{(w + 3)(1 - w)}{1.3 + 2.2w + 0.5w^2}$$

Se puede entonces construir el arreglo de Routh para la ecuación característica:

w^2	0.5 1.3
w^1	2.2
w^0	1.3

Aquí no hay cambios de signo en la primera columna; así, todos los polos de w están en el semiplano izquierdo del plano w, por lo tanto, todos los polos de z están en el círculo unitario; el sistema es estable.

Otra forma de prueba para determinar si todas las raíces de la función de transferencia pulso están en el interior del círculo unitario ha sido ideada por Jury. La ecuación característica se ordena para que esté en la forma

$$F(z) = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \ldots + a_k z^k = 0 \qquad [37]$$

Se construye, entonces, una tabla de la siguiente forma

Renglón							
1	a_0	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\cdots$	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_{n-1}	b_n
4	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_1	b_0
5	c_0	c_1	c_2	c_3	$\cdots$	c_{n-1}	c_n
6	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	$\cdots$	c_1	c_0
7	d_0	d_1	d_2	d_3	$\cdots$	d_{n-1}	d_n
8	d_n	d_{n-1}	d_{n-2}	d_{n-3}	$\cdots$	d_1	d_0
y así de manera sucesiva							

Los primeros dos renglones consisten de los coeficientes tomados en orden. El segundo renglón tiene los mismos coeficientes en orden inverso. El tercer renglón tiene los coeficientes b en orden y se determinan mediante

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \qquad [38]$$

El cuarto renglón tiene estos coeficientes b en orden inverso. El quinto renglón tiene los coeficientes c en orden y se determinan mediante

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix} \qquad [39]$$

El sexto renglón tiene estos coeficientes c en orden inverso. El séptimo renglón tiene los coeficientes d en orden y se determinan mediante

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2\ k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix} \qquad [40]$$

El octavo renglón tiene estos coeficientes d en orden inverso. Este procedimiento continúa hasta que el arreglo termina con un renglón de tres números.

La prueba de Jury establece que las raíces de la ecuación característica estarán en el interior del círculo unitario en el plano z si, y sólo si

$$F(1) > 0 \qquad (-1)^n F(-1) > 0 \qquad [41]$$

y

$$|a_0| < a_n \quad |b_0| > |b_{n-1}| \quad |c_0| > |c_{n-2}|$$
$$|d_0| > |d_{n-3}| \text{ y así en forma sucesiva} \qquad [42]$$

Para ejemplificar lo anterior considere la función de transferencia pulso con la ecuación característica

$$F(z) = z^3 + 2z^2 + 1.9z + 0.7 = 0$$

Antes de formar el arreglo, se verifica la condición [41]

$$F(1) = 1 + 2 + 1.9 + 0.7 = 5.6$$

por lo tanto, $F(1)$ es mayor a 0. Y

$$F(-1) = -1 + 2 - 1.9 + 0.7 = -0.2$$

así, $(-1)^3 F(-1) = 0.2$, mayor a 0. Con estas condiciones satisfechas, se forma la tabla.

Renglón				
1	0.7	1.9	2.0	1.0
2	1.0	2.0	1.9	0.7
3	−0.51	−0.67	−0.5	

$$b_1 = \begin{vmatrix} 0.7 & 1.0 \\ 1.0 & 0.7 \end{vmatrix}$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} 0.7 & 2.0 \\ 1.0 & 1.9 \end{vmatrix}$$

$$b_3 = \begin{vmatrix} 0.7 & 1.9 \\ 1.0 & 2.0 \end{vmatrix}$$

Al verificar los contenidos se muestra que

$$|a_0| < a_n \text{ puesto que } 0.7 < 1.0$$

$$|b_0| > |b_{n-1}| \text{ puesto que } |-0.51| > |-0.50|$$

De este modo, puesto que todos los requerimientos se alcanzan, en el plano z no hay raíces fuera del círculo unitario.

Ejemplo 18

Usar la prueba de Routh-Hurwitz para determinar si el sistema con la siguiente función de transferencia pulso es estable:

$$G(z) = \frac{1}{2z^3 + 1.6z^2 + 0.5z + 0.2}$$

Respuesta

Al sustituir $(1 + w)/(1 - w)$ por z se obtiene la ecuación característica

$$2[(1 + w)/(1 - w)]^3 + 1.6[(1 + w)/(1 - w)]^2 + 0.5[(1 + w)/(1 - w)] + 0.2 = 0$$

$$0.7w^3 + 4.5w^2 + 6.5w + 4.3 = 0$$

El arreglo de Routh para ésta es

w^3	0.7	6.5
w^2	4.5	4.3
w^1	5.8	
w^0	4.3	

Puesto que no hay cambios de signo en los elementos de la primera columna, el sistema es estable.

Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia de un sistema es su respuesta en estado estable a una entrada senoidal. Para determinar la respuesta en frecuencia de un sistema en tiempo discreto, se usa una entrada en tiem-

po discreto, la cual se obtiene mediante muestreo de una senoidal cada T segundos.

La respuesta en frecuencia de un sistema en tiempo continuo se obtiene al evaluar la función de transferencia con $s = j\omega$ (vea el capítulo 11). Debido a que $z = e^{sT}$, la respuesta en frecuencia de un sistema en tiempo discreto se puede obtener al evaluar la función de transferencia pulso con $z = e^{j\omega T}$.

Esto puede conducir a expresiones muy complicadas para la respuesta en frecuencia. Sin embargo, al reemplazar z por $(1 + w)/(1 - w)$, como en la ecuación [36], se puede trabajar de manera más sencilla con el plano w. Esta transformación a menudo se conoce como *transformación bilineal*; en algunos libros de texto se usa r en lugar de w. Entonces, $w = j\omega_w$. De esta manera

$$e^{j\omega T} = \frac{1 + w}{1 - w}$$

y así

$$w = j\omega_w = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1}$$

Al usar las relaciones de Euler se obtiene

$$\omega_w = \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \qquad [43]$$

Ejemplo 19

Determinar mediante el método directo la respuesta en frecuencia de un sistema de datos muestreados que tiene una función de transferencia de $0.8 / (z + 0.8)$.

Respuesta

Al reemplazar z por $e^{j\omega T}$ se obtiene la función de respuesta en frecuencia como

$$G(j\omega) = \frac{0.8}{e^{j\omega T} + 0.8}$$

La fórmula de Euler da $e^{j\omega T} = \cos \omega T + j\text{sen}\, \omega T$. De esta forma

$$G(j\omega) = \frac{0.8}{\cos \omega T + j\text{sen}\, \omega T + 0.8}$$

Si el numerador y el denominador se multiplican por $(\cos \omega T + 0.8) - j\text{sen}\, \omega T$, se obtiene

$$G(j\omega) = \frac{0.8[(\cos \omega T + 0.8) - j\text{sen}\, \omega T]}{(\cos \omega T + 0.8)^2 - \text{sen}^2\, \omega T}$$

La ganancia del sistema es, entonces

$$|G(j\omega)| = \frac{0.8}{[(\cos \omega T + 0.8)^2 + \text{sen}^2\, \omega T]^{1/2}}$$

y el ángulo de fase está dado por

$$\tan \phi = -\frac{\text{sen}\, \omega T}{\cos \omega T + 0.8}$$

Ejemplo 20

Usar el método de la transformación bilineal para determinar la respuesta en frecuencia de un sistema de datos muestreados que tiene una función de transferencia pulso de $z/(z-1)(z-0.4)$.

Respuesta

Al reemplazar z por $(1+w)/(1-w)$ se obtiene

$$G(w) = \frac{(1+w)(1-w)}{(1+w-1+w)(1+w-0.4+0.4w)}$$

$$= \frac{1-w^2}{1.2w + 2.8w^2}$$

Al hacer $w = j\omega_w$ se obtiene:

$$G(j\omega_w) = \frac{1+\omega_w^2}{1.2j\omega_w - 2.8\omega_w^2} = \frac{(1+\omega_w^2)(-1.2\, j\omega_w - 2.8\omega_w^2)}{(1.2\omega_w)^2 + (2.8\omega_w^2)^2}$$

Por lo tanto

$$|G(j\omega_w)| = \frac{1+\omega_w^2}{[(1.2\omega_w)^2 - (2.8\omega_w^2)^2]^{1/2}}$$

$$\tan \phi_w = \frac{1.2}{2.8\omega_w}$$

Según la ecuación [43], las ecuaciones anteriores se pueden convertir en expresiones en términos de ω.

Problemas

1 Determinar la respuesta de un proceso a un impulso unitario en el tiempo $t = 0$ si la salida del proceso está determinada por la ecuación en diferencias $y[k] = 0.5x[k] + 0.5y[k-1]$.

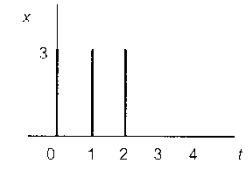


Figura 15.29 Problema 3

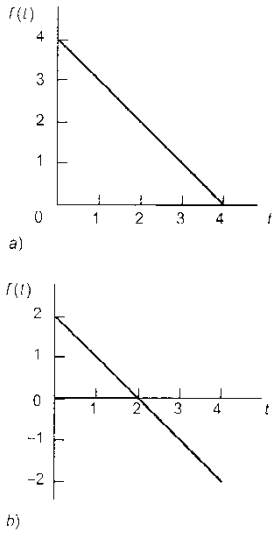


Figura 15.30 Problema 4

2 Determinar la respuesta de un proceso a un escalón unitario en el tiempo $t = 0$ si la salida del proceso está determinada por la ecuación en diferencias $y[k] = 0.5x[k] + 0.5y[k \quad 1]$.

3 Describir la señal que ilustra la figura 15.29 en términos de funciones impulso.

4 Para la señal en tiempo continuo que muestra la figura 15.30, establecer los valores de los pulsos que se producirían por un ADC hasta $k - 3$ si el periodo de muestreo es 1 s.

5 Para la función en tiempo continuo $3\text{sen}2t$ dibujar la función $f^*(t)$ cuando el periodo de muestreo es de 0.2 s.

6 Explicar qué significa sistema de retén de orden cero (ZOH).

7 Encontrar la transformada z de las siguientes secuencias:

a) 1, 0, 0, y todos los valores subsecuentes son 0.

b) 0, 0, 2, y todos los valores subsecuentes son 2.

c) 0, 0, 1, y todos los valores subsecuentes son 1.

d) 0, 1, 2, 3, ..., $f(kT) = k$.

8 Con la división larga, encontrar la transformada z inversa en la forma de secuencia de muestras para las siguientes funciones:

a) $F(z) = \dfrac{1}{z+1}$

b) $F(z) = \dfrac{2z+1}{z^2+2}$

c) $F(z) = \dfrac{2z^2-1}{z^2+4z+2}$

9 Con la expansión en fracciones parciales, encontrar la transformada z inversa para las siguientes funciones:

a) $F(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$

b) $F(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+2)}$

c) $F(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$

10 Determinar la función de transferencia pulso para un sistema de procesamiento en tiempo discreto que se describe mediante la ecuación en diferencias $y[k] = 3y[k-1] + 2x[k-1]$, y encontrar la secuencia en tiempo discreto de la respuesta a una entrada escalón unitario muestreado.

11 Determinar la respuesta a una entrada impulso unitario de un sistema de procesamiento en tiempo discreto que tiene una función de transferencia pulso de $z/(z-1)$.

12 Determinar la función de transferencia pulso para un sistema de procesamiento en tiempo discreto que tiene la ecuación en diferencias $y[k+2]-5y[k+1]+6y[k]=x[k]$.

13 Determinar la función de transferencia pulso para un sistema de procesamiento en tiempo discreto del diagrama de bloque de la figura 15.31.

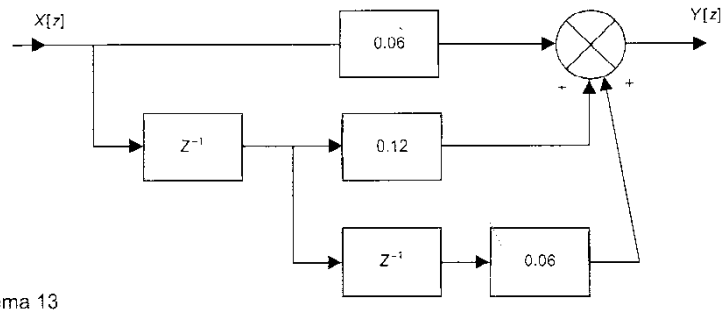


Figura 15.31 Problema 13

14 ¿Cuál es la transformada z de las siguientes funciones de transferencia?

a) $G(s)=\dfrac{1}{s+1}$

b) $G(s)=\dfrac{s}{s+0.5}$

c) $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$

15 ¿Cuál es la salida de un sistema de datos muestreados con periodo de muestreo de 1 s, que consta de un elemento retén de orden cero en serie con un elemento que tiene una función de transferencia de $s/(s+0.1)$ y está sujeto a un impulso unitario?

16 ¿Cuál es la salida de un sistema de datos muestreados con periodo de muestreo de 1 s, que consta de un elemento retén de orden cero en serie con un elemento que tiene una función de transferencia de $1/(s^2+s+1)$ y está sujeto a un escalón unitario?

17 ¿Cuál es la salida de un sistema de datos muestreados en lazo cerrado de la forma que describe la figura 15.21*b* cuando está sujeto a una entrada escalón unitario si la planta tiene una función de transferencia de $1/s(s+1)$, el controlador una función de transferencia de 1 y el periodo de muestreo es de 1 s?

18 ¿Cuál es la función de transferencia pulso de un sistema de datos muestreados en lazo cerrado de la forma que ilustra la figura 15.21*b* si la planta tiene una función de transferencia de

$1/(s+0.1)$ y el controlador sigue una ley de control dada por el control PD con $K_p = 10$, $K_d = 4$ y el periodo de muestreo es de 1 s?

19 Mostrar que, para un sistema de control en tiempo discreto en lazo cerrado, si el controlador tiene una ley de control puramente integral éste tendrá una función de transferencia pulso de $Tz/(z-1)$.

20 Determinar los polos del sistema en lazo cerrado con una función de transferencia pulso de $1/(z^2 - 1.4z + 0.48)$.

21 Determinar si los sistemas de datos muestreados con las siguientes funciones de transferencia pulso son estables:

a) $G(z) = \dfrac{4}{z+0.6}$

b) $G(z) = \dfrac{2z-1}{z(z-1)}$

c) $G(z) = \dfrac{0.2z - 0.6}{z^2 - 0.1z + 0.5}$

d) $G(z) = \dfrac{0.1z + 0.7}{z^2 + 0.2z - 0.1}$

22 Un sistema en lazo cerrado consta de una trayectoria directa con un sistema de retén de orden cero, una planta con función de transferencia de $K/(s+1)$ y realimentación unitaria. ¿Cuál es la condición para que el sistema sea estable cuando el periodo de muestreo es de 1 s?

23 Un sistema en lazo cerrado consta de una trayectoria directa con un sistema de retén de orden cero, una planta con función de transferencia de $1/(s+1)$, un controlador proporcional con ganancia de 10 y realimentación unitaria. Determinar el periodo de muestreo que conducirá a un sistema críticamente estable.

24 Determinar si los sistemas con las siguientes funciones de transferencia pulso son estables.

a) $\dfrac{4(z-0.1)}{z^3 - 2z^2 + z - 0.4}$

b) $\dfrac{z^3}{z^3 + 0.3z^2 - 0.2z - 0.1}$

25 Usar la prueba de Jury para determinar la estabilidad del sistema con la función de transferencia pulso que tiene la ecuación característica $z^3 + 0.33z^2 - 0.25z - 0.08 = 0$.

26 Determinar la respuesta en frecuencia del sistema de datos muestreados que tiene una función de transferencia pulso de $0.1/(z-0.4)$.

Apéndice: MATLAB

Introducción

Este apéndice es una breve introducción a MATLAB (marca registrada por Mathworks Inc.), versión 4.0 o posteriores; el software se usa con amplitud en los cursos de ingeniería de control. La intención es mostrar el potencial del software y permitir un buen inicio con su uso. Para información adicional se sugiere al lector la guía de usuario o libros de texto como *The MATLAB Handbook* de Eva Pärt-Enander, Anders Sjöberg, Bo Melin y Pernilla Isaksson (Addison-Wesley, 1996) y *Using MATLAB to Analyse and Design Control Systems*, 2ª edición, de Naomi Ehrich Leonard y William S. Levone (Addison-Wesley, 1995).

Inicio y terminación de sesión

Para iniciar sesión en MATLAB, en sistemas Windows o Macintosh, dar un click en el icono de MATLAB, de otro modo, escribir **matlab**, presionando enseguida la tecla intro (enter) o retorno (return), en el prompt del sistema. La pantalla producirá el prompt de MATLAB >>.

Para terminar la sesión de MATLAB escribir **quit** o **exit** después del prompt, presionando a continuación la tecla enter o return.

Ingreso de comandos

Como antes se indicó para el comando **quit**, los comandos se ingresan escribiéndolos después del prompt. La tecla enter o return se presiona después de ingresar un comando de MATLAB a fin de que el comando se pueda ejecutar. En el siguiente análisis de los comandos no se repetirá que se debe presionar la tecla enter o return, pero se entiende que se hace en todos los casos.

Debido a que MATLAB es sensible a las mayúsculas, de principio a fin se deben usar minúsculas, aspecto muy importante para los comandos.

Ayuda

Al escribir **help** después del prompt, o al seleccionar **help** de la barra de menú en la parte superior de la ventana de MATLAB, se muestra una amplia lista de ayudas de los temas de MATLAB. Para obtener ayuda sobre un tema particular, por ejemplo, exponenciales, escriba **help exp**. Al escribir **lookfor** y algún tema, se da la instrucción para que MATLAB busque la información sobre ese tema, por ejemplo, **lookfor integ** mostrará varios comandos que se podrían considerar para la integración.

Matrices

El formato básico que se usa para los datos en MATLAB es la matriz o vector; un vector columna es una matriz que consta de una sola columna y un vector renglón es una matriz con un solo renglón. Las matrices ingresan a MATLAB mediante el listado de los elementos de la matriz y encerrándolos dentro de un par de corchetes cuadrados. Los elementos de un renglón se separan por blancos o comas y los renglones mediante retornos de carro o punto y coma (;). Por ejemplo, la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ingresaría como

```
>> a = [1 2; 3 4]   o    >> a = [1 2
                              3 4]
```

y el resultado aparecería en la pantalla como

```
a =
    1   2
    3   4
```

Para referirse a un elemento específico de una matriz se especifica su renglón seguido por su columna. Por ejemplo, si ingresa **>> A(2, 2) = 5**, el elemento en el segundo renglón y la segunda columna, es decir, 4, se cambiaría a 5. Para adicionar un renglón a la matriz **A** se escribe

```
>> a = [a; [5 6]]
```

Los vectores ingresan de manera similar a las matrices, por ejemplo

```
>> vcol = [1; 2; 3; 4] y >> vrow = [5  6  7  8]
```

Operaciones aritméticas

En general, las operaciones matemáticas ingresan a MATLAB en la misma forma como se escribe en papel. Por ejemplo

```
>> a = 4/2
```

da la respuesta

```
a =
     2
```

y

```
>> a = 3*2
```

da la respuesta

```
a =
     6
```

Las operaciones se realizan en el siguiente orden: ^ potenciación, * multiplicación, / división, + adición, – sustracción. La precedencia de operadores es de izquierda a derecha, pero se pueden usar paréntesis ( ) para alterar el orden. Por ejemplo

```
>> a = 1+2^3/4*5
```

da la respuesta

```
a =
    11
```

puesto que se tiene $2^3/4$, el cual se multiplica por 5 y entonces se suma a 1, mientras que

```
>> a = 1+2^3/(4*5)
```

da la respuesta

```
a =
   1.4
```

puesto que se tiene 2^3 dividido entre el producto de 4 y 5, y entonces se suma a 1.

Funciones matemáticas

Las siguientes son algunas funciones matemáticas disponibles con MATLAB:

abs(x)	Da el valor absoluto de x, es decir, $\|x\|$
exp(x)	Da la exponencial de x, es decir, e^x
log(x)	Da el logaritmo natural de x, es decir, $\ln x$
log10(x)	Da el logaritmo en base 10 de x, es decir, $\log_{10} x$
sqrt(x)	Da la raíz cuadrada de x, es decir, $\sqrt{x}$
sin(x)	Da sen x, donde x está en radianes
cos(x)	Da cos x, donde x está en radianes
tan(x)	Da tan x, donde x está en radianes
asin(x)	Da arcsen x, es decir, $\text{sen}^{-1} x$
acos(x)	Da arccos x, es decir, $\cos^{-1} x$
atan(x)	Da arctan x, es decir, $\tan^{-1} x$
csc(x)	Da $1/\text{sen}\, x$
sec(x)	Da $1/\cos x$
cot(x)	Da $1/\tan x$

π ingresa escribiendo **pi**.

Operaciones con matrices

Las operaciones con matrices ingresan y se llevan a cabo en la misma forma que las operaciones aritméticas. Por ejemplo, para sumar las matrices **A** y **B**, primero se especifican las matrices y entonces se ingresa la operación requerida:

```
>> A+B
```

MATLAB entonces presenta la respuesta, por ejemplo

```
ans =
     2   0
     0   4
```

La variable **ans** se aplica al resultado previo si no se hace alguna asignación a que es igual **A+B**.

Archivo de función

En lugar de escribir una serie de comandos en el prompt, se puede escribir un archivo de texto y ejecutar los comandos mediante referencias a MATLAB desde ese archivo. El término archivo-M se usa debido a que estos archivos de texto contienen varios comandos de MATLAB que se ejecutan en forma consecutiva. Estos archivos tienen la extensión **.m** y al escribirlos, la primera línea debe empe-

zar con la palabra **function** seguida de un enunciado que identifique el nombre de la función y los parámetros de entrada y salida en la forma

function [parámetros de salida] =
nombre de la función [parámetros de entrada]

por ejemplo, **function y=cotan(x)**, la cual es el archivo que se usa para determinar el valor de y dado mediante cotan x. Este archivo se puede llamar desde cualquier secuencia de comandos de MATLAB escribiendo el nombre seguido del parámetro de entrada, por ejemplo, **cotan(x)**. De hecho, esta función la incluye MATLAB y se usa cuando se requiere la cotangente de x. Sin embargo, el archivo lo puede escribir por el usuario. Cuando una función tiene varios parámetros de entrada todos se deberán listar en el enunciado de la función. Del mismo modo, en una función que va a regresar varios valores se deberán listar todas las salidas.

Las líneas que inician con % son líneas de comentario; MATLAB no las interpreta como comandos. Las líneas de comentario se mostrarán si se solicita ayuda mediante el nombre de la función escribiendo >> **help** y el nombre de la función. Por ejemplo, suponga que se escribe un programa para determinar el valor medio cuadrático de una sola columna de datos; el programa se vería como

```
function y=rms(x)
% rms Valor Medio Cuadrático
% rms(x) da el valor medio cuadrático de los
% elementos del vector columna x
xs=x^2;
s=size(x);
y=sqrt(sum(xs)/s);
```

Se ha hecho que **xs** sea el valor cuadrático de cada valor del vector **x**. El comando **s=size(x)** obtiene la longitud, es decir, el número de elementos, de la columna de datos. El comando **y = sqrt(sum(xs)/s(1))** obtiene la raíz cuadrada de la suma de todos los valores **xs** divididos entre **s**. El comando **;** se usa al final de cada línea del programa.

MATLAB suministra varias toolboxes (conjuntos de funciones) que contienen colecciones de archivos-M. La toolbox de Sistemas de Control es de particular relevancia en este libro. Ésta se puede usar para obtener la respuesta en el tiempo de un sistema a entradas impulso, escalón, rampa, etcétera; así como análisis de Bode, Nyquist, lugar geométrico de las raíces, etcétera.

Graficación

Se pueden producir gráficas lineales en dos dimensiones mediante el comando **plot(x,y)**; éste grafica los valores de **x** y **y**, es decir, el vector **x** y el vector **y**. Por ejemplo, se podría tener

```
x = [0 1 2 3 4 5];
y = [0 1 4 9 16 25];
plot(x,y)
```

Para graficar una función, ya sea estándar o definida por el usuario, se emplea el comando **fplot** (nombre de la función,**lim**), donde **lim** determina el intervalo de graficación, es decir, los valores mínimos y máximos de **x**.

El comando **semilogx(x,y)** genera una gráfica de los valores de **x** y **y** mediante una escala logarítmica para **x** y escala lineal para **y**. El comando **semilogy(x,y)** genera una gráfica de los valores de **x** y **y** a partir de una escala lineal para **x** y escala logarítmica para **y**. El comando **loglog(x, y)** genera una gráfica de los valores de **x** y **y** con base en escalas logarítmicas para **x** y **y**. El comando **polar(theta,r)** gráfica en coordenadas polares; **theta** es el argumento en radianes y **r** la magnitud.

El comando **subplot** permite dividir la ventana de graficación en subventanas y situar las gráficas en cada una de ellas. Por ejemplo, se podría tener:

```
x=(0 1 2 3 4 5 6 7);
y=expx;
subplot(2,1,1); plot(x,y);
subplot(2,1,2); semilogy(x,y);
```

Con el comando **subplot** resultan tres enteros *m*, *n*, *p*; los dígitos *m* y *n* indican que la ventana gráfica se va a dividir en una retícula de $m \times n$ pequeñas ventanas, donde *m* es el número de renglones y *n*, el de columnas; el dígito *p* especifica la ventana que se va a usar para la gráfica. Las subventanas se numeran por renglón de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. De este modo, la secuencia anterior de comandos divide la ventana en dos, con una gráfica arriba de la otra; la gráfica superior es lineal y la gráfica inferior es semilogarítmica.

Se puede seleccionar el número y estilo de la retícula, el color de la gráfica y texto adicional a la gráfica.

El comando **print** se usa para imprimir una copia de respaldo de la gráfica, ya sea en un archivo o en una impresora. Esto se puede hacer al seleccionar del *menú* de archivo en la ventana de la figura y la opción de impresión.

Ejemplos de control

Estos son algunos ejemplos de cómo usar MATLAB para resolver problemas sencillos de control.

Las siguientes líneas se podrían usar en un programa de MATLAB para ingresar una función de transferencia:

```
% G(s)=4(s+10)/(s+5)(s+15)
num=4*[1 10];
den=conv([1 5],[1 15]);
printsys(num, den,'s')
```

El comando **num** se usa para indicar el numerador de la función de transferencia, en potencias descendentes de s. El comando **den** se emplea para indicar el denominador en potencias descendentes de s para cada uno de los dos polinomios del denominador. El comando **conv** multiplica los dos polinomios; en este caso, $(s+5)$ y $(s+15)$. El comando **printsys** presenta la función de transferencia con el numerador y el denominador especificados y escritos en el dominio de s.

Algunas veces la función de transferencia se puede presentar como el cociente de polinomios y es necesario encontrar los polos y ceros. Para este caso se puede usar:

```
% Encontrar los polos y ceros para
% la función de transferencia
% G(s)=(5s^2 + 3s + 4)/(s^3 + 2s^2 + 4s + 7)
num=[5 3 4];
den=[1 2 4 7];
[z, p, k]=tf2zp(num,den)
```

[z, p, k]=tf2zp(num,den) es el comando para determinar y mostrar los ceros (**z**), los polos (**p**) y la ganancia (**k**) de la función de transferencia ceros-polos-ganancia que se ingresó

MATLAB se puede usar para producir gráficas que muestren la respuesta de un sistema a diferentes entradas. Por ejemplo, el siguiente programa dará la respuesta de un sistema a una entrada escalón unitario $u(t)$ con una función de transferencia especificada:

```
% Presentar la respuesta a una entrada
% escalón para un sistema con
% función de transferencia G(s)=5/(s^2+3s+12)
num=5;
den=[1 3 12];
step(num,den)
```

Para obtener una traza de Bode de un sistema descrito mediante una función de transferencia, se puede usar:

```
% Generar la traza de Bode para G(s)=4/(s^2+2s+3)
num=4;
den=[1 2 3];
bode(num,den)
```

El comando **bode(num,den)** produce una traza de Bode de ganancia en dB contra frecuencia en rad/s en una escala logarítmica, y la fase en grados contra frecuencia en rad/s en una escala logarítmica.

Para producir una traza de Nyquist de un sistema descrito mediante una función de transferencia se puede usar:

```
% Generar la traza de Nyquist para G(s)=4/(s^2+2s+3)
num=4;
den=[1 2 3];
nyquist(num,den)
```

Se pueden producir gráficas del lugar geométrico de las raíces para un sistema descrito a través de una función de transferencia con un programa de la forma:

```
% Generar la gráfica del lugar geométrico
% de las raíces para G(s)=(s+1)/(s^2+4s+3)
num=[1 1];
den=[1 4 3];
rlocus(num,den)
```

Diagramas de bloques

Los sistemas de control a menudo se representan como una serie de bloques interconectados, cada uno de los cuales tiene características específicas. MATLAB permite formar sistemas a partir de bloques interconectados. Los comandos **cloop** se usan cuando se quiere reducir un bloque con función de transferencia en lazo abierto que tiene realimentación unitaria. Si la realimentación no es unitaria se usa el comando **feedback**; por ejemplo, con el sistema de la figura Ap.1, se tiene el programa:

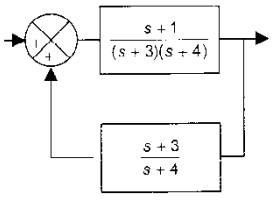


Figura Ap.1

```
% Sistema con lazo de realimentación
ngo=[1 1];
dgo=conv([1 3],[1 4]);
nh=[1 3];
dh=[1 4];
[ngc2,dgc2]=feedback(ngo,dgo,nh,dh)
printsys(ngc2,dgc2,'s')
```

El numerador y el denominador de la función de transferencia en lazo abierto $G_0(s)$, se indican mediante **ngo** y **dgo**, respectivamente; **nh** y **dh** son el numerador y denominador de la función de transferencia en el lazo de realimentación, $H(s)$. El programa produce la presentación de la función de transferencia para el sistema como un todo.

El comando **series** se usa para indicar que los dos bloques en serie están en una trayectoria particular; el comando **parallel** señala que los bloques están en paralelo.

SIMULINK

Junto con MATLAB se usa SIMULINK para especificar sistemas mediante la "conexión" de cajas en la pantalla, mejor que como antes se describió, escribiendo una serie de comandos para generar la descripción del diagrama de bloques. Una vez que se inicia una sesión en MATLAB, SIMULINK se selecciona con el comando >> **simulink**. Esto abre la ventana de control de SIMULINK con sus iconos y menús de persiana (pull-down) en la barra de encabezado. Para iniciar hacer click en **file**, y en **new** del menú de persiana; con ello abre una ventana en la que el sistema se puede formar.

Para iniciar el ensamblado de los bloques requeridos, regresar a la ventana de control y dar un doble click en el icono **linear**. Hacer click en el icono **transfer Fcn** y llevarlo hacia la ventana untitled. Si se requiere un bloque de ganancia, hacer click en el icono de **gain** y llevarlo hacia la ventana untitled. Hacer lo mismo con el icono **sum** y quizá con el icono **integrator**. De esta manera, lleva todos los iconos requeridos hacia la ventana untitled. Hacer entonces doble click en el icono **Sources** y seleccionar la fuente apropiada entre las diferentes opciones; por ejemplo, **step input**, y llevarlo hacia la ventana untitled. Ahora hacer doble click en el icono **sinks** y llevar el icono **graph** hacia la ventana untitled. Para conectar los iconos (bloques), posicionar el apuntador del ratón en el símbolo de salida de un bloque y llevarlo hasta el símbolo de entrada del bloque al que se va a conectar. Repetir el proceso hasta que se termine de ensamblar todo el diagrama de bloques.

Para ingresar una función de transferencia en la caja de **transfer Fcn**, hacer doble click en la caja. Esto exhibirá una caja de diálogo en la cual se pueden usar los comandos de MATLAB para el numerador y el denominador. Hacer click en el numerador y escribir **[1 1]** si se requiere $(s+1)$. Hacer click en el denominador y escribir **[1 2 3]** si se requiere (s^2+2s+3). Entonces hacer click en el botón de **done**. Hacer doble click en el bloque de **gain** y escribir el valor de la ganancia. Hacer doble click en el bloque de **sum** y establecer los signos a + o − según se requiera realimentación positiva o negativa. Hacer doble click en el bloque **graph** y establecer los parámetros para la gráfica. Así se completa el diagrama de simulación en pantalla. La figura Ap.2 muestra la forma que podría tomar.

Para borrar cualquier bloque o conexión, es necesario seleccionarlos mediante un click y presionar la tecla <DEL>.

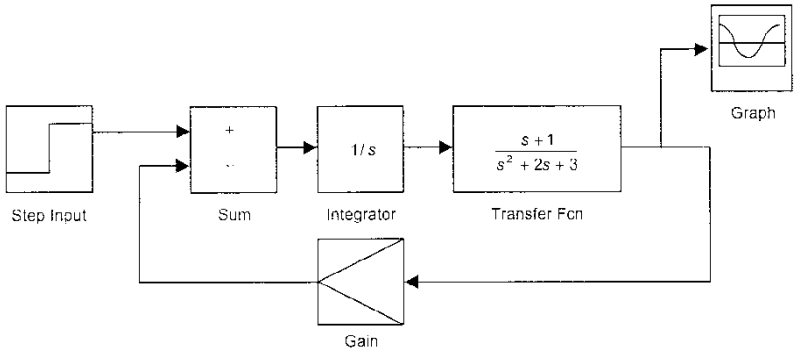


Figura Ap.2

El archivo se puede respaldar al seleccionar en el menú de persiana **File** y hacer click en la opción **SAVE AS**. En la caja de diálogo insertar el nombre del archivo y hacer click en **Done**.

Hacer click en el menú de **Simulation** para abrirlo. Seleccionar **Parameters** y fijar los tiempos de inicio y paro para la simulación. Del menú **Simulation**, seleccionar **Start**. SIMULINK creará una ventana gráfica y presentará la salida del sistema.

Respuestas a los problemas

Capítulo 1

1. Vea el texto.
2. *a*) y *b*) lazo cerrado con termostatos, *c*) lazo abierto sin termostato.
3. Lazo cerrado debería tener realimentación para indicar el tráfico, lazo abierto sólo sería operado y controlado por tiempo sin considerar el tráfico.
4. Éstas podrían ser, aunque hay otras posibilidades: Variable controlada *a*) luz, *b*) temperatura, *c*) luz. Valor de referencia – *a*) establecer la velocidad/apertura para la velocidad de la película, *b*) establecer la temperatura, *c*) establecer el mínimo nivel de luz. Elemento de comparación – *a*) amplificador diferencial, *b*) termostato, *c*) un relevador. Señal de error – *a*), *b*), *c*) la diferencia entre la señal real y los valores requeridos. Elemento de control – *a*) el amplificador, *b*) el termostato, *c*) el relevador. Elemento de corrección – *a*) un actuador para cambiar los ajustes de velocidad/apertura, *b*) dispositivo que conmute o varíe la corriente a través del calefactor, *c*) lámpara. Proceso – *a*) película en una cámara, *b*) un horno, *c*) una situación particular. Dispositivo de medición – *a*), *c*) fotocelda, *b*) termómetro.
5. Vea el texto.
6. *a*), *b*) dos posiciones, *c*) proporcional.
7. Comparación y control – amplificador diferencial, corrección – relevador, proceso – calentador en el líquido, realimentación a través del sistema de medición. Error = diferencia entre las dos entradas al amplificador diferencial, es decir, voltajes de referencia y medición.
8. 0.14 mA/°C.
9. Vea el texto: si la entrada se multiplica por un factor constante, entonces la salida se multiplica por el mismo factor; si la entrada 1 produce la salida 1 y la entrada 2, la salida 2, entonces la entrada 1 más la 2 produce la salida 1 más la 2.
10. *b)* 2.0 mA por m/s, *c*) 0.6 m/s por mA, *d*) 0.3 mA por m/s.
11. $-0.2\theta_i$, 4%.

12. $-0.90\theta_i$, -6.9×10^{-2} %.
13. Vea el texto.
14. Reducido por ½, reducido por $0.5K/(1+0.5K)$.
15. Vea el texto y la comparación de los sistemas en lazo abierto y en lazo cerrado.

Capítulo 2

1. *a)* $m(\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2)+c(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)=F$,
   b) $m(\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2)+c(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)+(k_1+k_2)x=F$.
2. Dos resortes torsionales en serie con un bloque de momento de inercia, $T=I(\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2)+k_1(\theta_1-\theta_2)=m(\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2)+[k_1k_2/(k_1+k_2)]\theta_1$.
3. $v=v_R+(1/RC)\int v_R\,\mathrm{d}t$.
4. $(L/R)\mathrm{d}v_R/\mathrm{d}t+(1/RC)\int v_R\,\mathrm{d}t+v_R=v$.
5. $(R_1C)\mathrm{d}v_C/\mathrm{d}t+[(R_1/R_2)+1]v_C=v$.
6. Vea la figura A.1.
7. Vea la figura A.2.
8. $RA_2(\mathrm{d}h_2/\mathrm{d}t)+h_2\rho g=h_1$
9. El mismo que el ejemplo del tubo en U,
   $p=\rho L(\mathrm{d}^2h/\mathrm{d}t^2)+RA(\mathrm{d}h/\mathrm{d}t)+2h\rho g$.
10. $RC(\mathrm{d}T/\mathrm{d}t)+T=T_r$, el capacitor cargado se descarga a través de un resistor.
11. $RC(\mathrm{d}T_1/\mathrm{d}t)=Rq-2T_1+T_2+T_3$,
    $RC(\mathrm{d}T_2/\mathrm{d}t)=T_1-2T_2+T_3$.
12. $\Delta F=(2kx_0)\Delta x$.
13. $\Delta E=(a+2bT_0)\Delta T$.
14. $\Delta T=(MgL)\Delta\theta$.

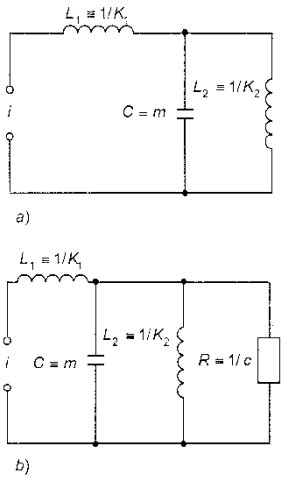


Figura A.1 Capítulo 2, problema 6

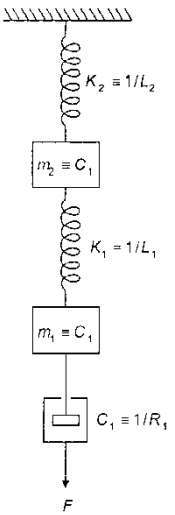


Figura A.2 Capítulo 2, problema 7

Capítulo 3

1. Vea el texto para ejemplos.
2. $dv/dt = 3(V - v)$.
3. $4\,d\theta_o/dt + \theta_o = 6\theta_i$.
4. *a*) 57.9 °C, *b*) 71.9 °C.
5. *a*) $i = (V/R)(1 - e^{-Rt/L})$, *b*) L/R, *c*) V/R.
6. *a*) $\tau = 0.6$ s, $G_{SS} = 1$, *b*) $\tau = 0.2$ s, $G_{SS} = 0.4$, *c*) $\tau = 0.33$ s, $G_{SS} = 0.67$.
7. Vea la figura 3.12, *a*) oscilaciones continuas, *b*) subamortiguado, *c*) amortiguamiento crítico, *d*) sobreamortiguado.
8. *a*) 4 Hz, *b*) 1.25, *c*) $i = \theta_i[(1/3)e^{-8t} - (4/3)e^{-2t} + 1]$.
9. *a*) 5 Hz, *b*) 1.0, *c*) $\theta_o = (-32 + 6t)e^{-5t} + 6$.
10. *a*) 9.5%, *b*) 0.020 s.
11. *a*) 4 Hz, *b*) 0.625, *c*) 1.45 Hz, *d*) 0.5 s, *e*) 8.1%, *f*) 1.6 s.
12. *a*) 0.59, *b*) 0.87.

Capítulo 4

1. *a*) $6/s$, *b*) $(6/s)e^{-3s}$, *c*) $6/s^2$, *d*) $(6/s^2)e^{-3s}$, *e*) 6, *f*) $6e^{-3s}$, *g*) $6(50/2\pi)/[s^2 + (50/2\pi)^2]$.
2. *a*) $1/(s+2)$, *b*) $5/(s+2)$, *c*) $V_0/[s + (1/\tau)]$, *d*) $2/s(s+2)$, *e*) $10/s(s+2)$, *f*) $(V_0/\tau)/s[s + (1/\tau)]$.
3. *a*) $2e^{-3t}$, *b*) $(2/3)e^{-t/3}$, *c*) $(2/3)(1 - e^{-3t})$, *d*) $2(1 - e^{-t/3})$.
4. *a*) $(6/5)(1 - e^{-2t/5})$, *b*) $4(1 - e^{-t/8})$.
5. *a*) $[5 \times (1/50)]/s[s + (1/50)]$, *b*) $(10/s) + [5 \times (1/50)]/s[s + (1/50)]$, *c*) $5/[s + (1/50)]$.
6. *a*) $5/(s+2)$, *b*) $9/[s(s+2)] + 5/(s+2)$.
7. *a*) 5, 5, *b*) 5 / 2, 0.
8. *a*) $e^{2t} + 3e^{-t}$, *b*) $4 - 2e^{-t} - 2e^{-2t}$, *c*) $e^{-t} - e^{-2t}$.
9. *a*) $x = 2\cos 8t$, *b*) $x = \frac{1}{4}\text{sen } 8t$.

Capítulo 5

1. *a*) $G(s) = 1/(R + 1/Cs)$, *b*) $G(s) = 1/[(1/R) + Cs + (1/Ls)]$, *c*) $G(s) = 1/(\rho Ls^2 + RAs + 2\rho g)$, *d*) $G(s) = (1/k)/[(1/\omega_n^2)s^2 + (2\xi/\omega_n)s + 1]$.
2. *a*) 1, *b*) 2, *c*) 2, *d*) 2.
3. Vea el texto.
4. Sobreamortiguado, raíces reales diferentes.
5. $50/(s^2 + 2s + 25)$, 52.7%.
6. Vea el texto.
7. te^{-3t}.
8. 0.05 s.
9. $\theta = [2/\sqrt{1 - 0.1^2}]\exp(-0.2t)\text{sen}[\sqrt{1 - 0.1^2}\,t]$.
10. $2e^{-3t} - 2e^{-4t}$.

Capítulo 6

1. *a*) $2/s(s+1)$, *b*) $20/(s-1)$, *c*) $(s+2)/(s^2 + 3s + 4)$, *d*) $4s/[s^2(s+1) - 1]$, *e*) $2K(s+1)/(s^2 - 2K - 1)$, *f*) $2s/(s^2 - 1)$, *g*) $Ks/(s^2 + s + 1)$.

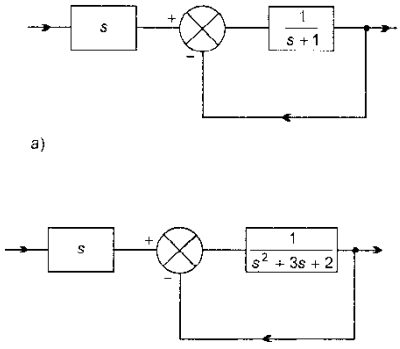


Figura A.3 Capítulo 6, problema 2

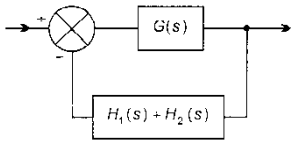


Figura A.4 Capítulo 6, problema 4

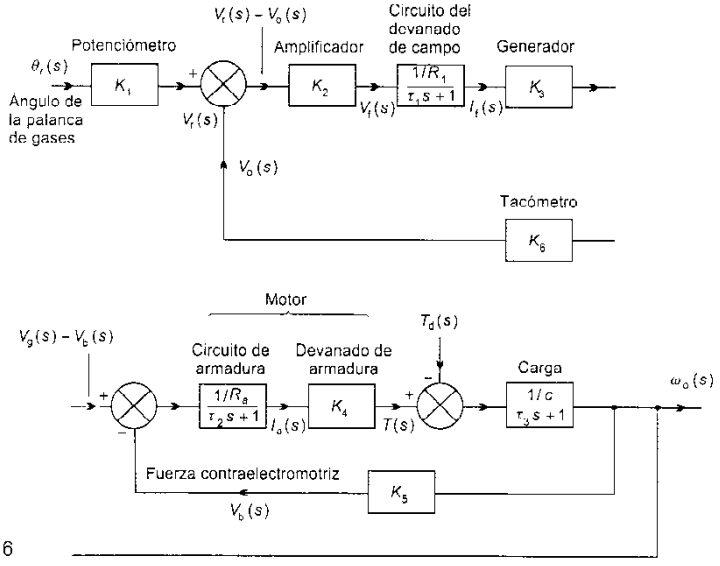


Figura A.5 Capítulo 6, problema 6

2. Vea la figura A.3.
3. La transformación 2 da $\theta_o(s) = G(s)[\theta_i(s) - H(s)\theta_o(s)]$ para un lazo de realimentación. Esto se puede arreglar como $\theta_o(s) = G(s)H(s)[\theta_i(s)/H(s) - \theta_o(s)]$, es decir, una trayectoria directa de $G(s)H(s)$ con una entrada de $[1/H(s)]\theta_i(s)$.
4. Vea la figura A.4.
5. $\theta_o(s) = \{G_1(s)G_2(s)/[1 + G_1(s)G_2(s)H(s)]\}\theta_i(s) + \{G_2(s)/[1+G_1(s)G_2(s)H(s)]\}\theta_{d1}(s) + \{1/[1+G_1(s)G_2(s)H(s)]\}\theta_{d2}(s)$
6. Vea la figura A.5, $\theta_i(s) = k_1k_2k_3(1/R_f)G_m(s)/[\tau_1 s + 1 + k_2k_3(1/R_f)G_m(s)]$, donde $G_m(s)$ es la función de transferencia del motor y es $(1/R_a)k_4(1/c)/[(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1) + k_5(1/R_a)k_4(1/c)]$.
7. $\theta_o(s)/\theta_i(s) = k_1k_2k_3/s(\tau s+1)$; con una rampa $\theta_o(s) = k_1k_2k_3[1/a^2 s - 1/as^2 + 1/s^3 - 1/a^2(s+a)]$, donde $a = 1/\tau$ y, así, $\theta_o = k_1k_2k_3[1/a^2 - t/a + \frac{1}{2}t^2 - (1/a^2)e^{-at}]$.
8. $\omega_o(s) = (1/R_f)k_5(1/c)V/[s^2(\tau s+1)]$, por lo tanto, $\omega_o = (1/R_f)k_5(1/c)V[1 - e^{-t/\tau}] = 2(1 - e^{-0.5t})$.

Capítulo 7

1. *a*) 0, *b*) 0, *c*) 1, *d*) 1, *e*) 2.
2. *a*) 0, *b*) 0, *c*) 0, *d*) 1.
3. *a*) 0.82 unidades, *b*) 0.69 unidades, al incrementar K se reduce el error.
4. *a*) 0, *b*) ab/K.

5. *i*) *a*) 2/7 unidades, *b*) 1/3 unidades, *c*) 0, *d*) 0, *e*) 0; *ii*) *a*) ∞, *b*) ∞, *c*) $\frac{1}{2}$ de unidad, *d*) 2 unidades, *e*) 0; *iii*) *a*) ∞, *b*) ∞, *c*) ∞, *d*) ∞, *e*) 1/6 de unidad.
6. −1.5 unidades.
7. *a*) 1, *b*) 0.

Capítulo 8

1. *a*) Estable, *b*), *c*) inestables.
2. *a*) Inestable, *b*), *c*) estables.
3. *a*) Polos −3, −2, cero $\frac{1}{2}$, *b*) polos 0, −2, cero $\frac{1}{4}$, *c*) polos −2, −3 +4, ceros −2, +3, *d*) polos (−1 + j1.4), (1 j1.4), sin ceros, *e*) polos 0, +3, −5, ceros (−0.5 + j0.87), (−0.5 − j0.87).
4. *a*) $1/s(s+1)(s+2)$, *b*) $s/(s-1)(s+3)$, *c*) $(s+1)/(s^2+4s+5)$, *d*) $(s+1)(s-2)/s(s^2-6s+13)$.
5. Estables *d*), *e*); críticamente estables *a*), *g*); inestables *b*), *c*), *f*).
6. *d*) puede ser estable, *b*) y *c*) inestables, *a*) críticamente estable en el mejor de los casos
7. *a*) Estable

s^3	1	8
s^2	4	12
s^1	5	
s^0	12	

b) Inestable

s^4	1	1	3
s^3	1	2	
s^2	−1	3	
s^1	5		
s^0	3		

c) Inestable

s^3	1	2
s^2	2	6
s^1	−1	
s^0	6	

d) Estable

s^4	1	24	16
s^3	4	32	
s^2	16	16	
s^1	28		
s^0	16		

8. Entre 0 y 8

s^3	1	4
s^2	2	K
s^1	$4-\frac{1}{2}K$	
s^0	K	

9. Uno

r^2	1	-1
r^1	2	
r^0	-1	

10. K entre -2 y 4.5

s^3	1	13
s^2	5	$20+10K$
s^1	$9-2K$	
s^0	$20+10K$	

Capítulo 9

1. Vea la figura A.6, *c*) $K=1$, *d*) $K=8$

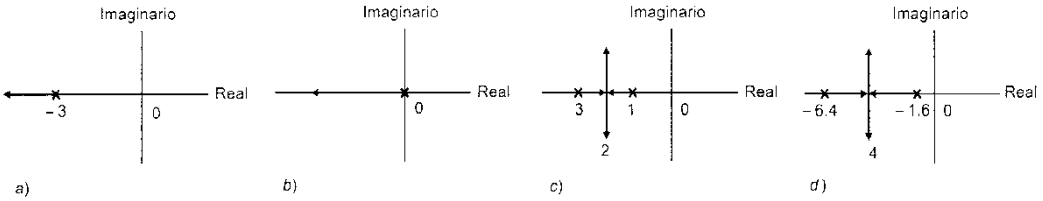


Figura A.6 Capítulo 9, problema 1

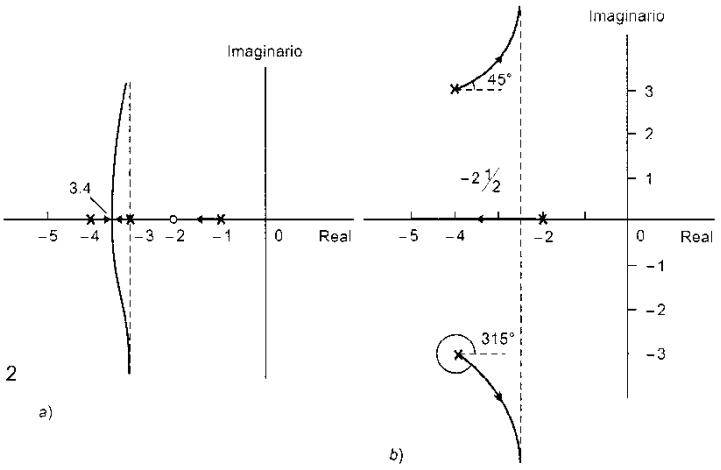


Figura A.7 Capítulo 9, problema 2

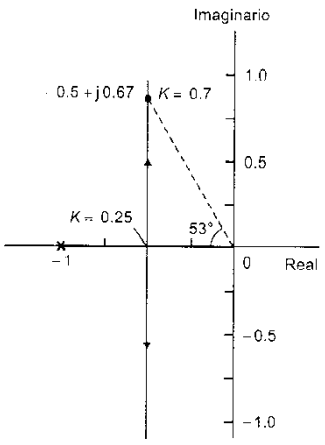
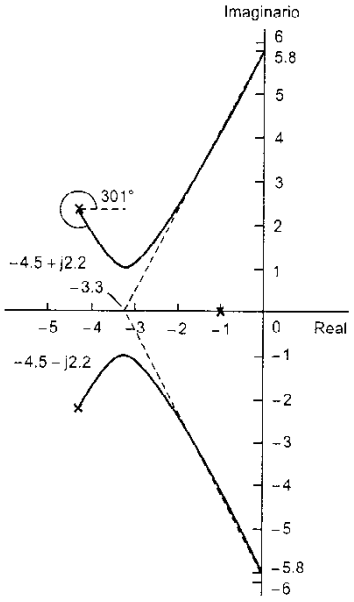
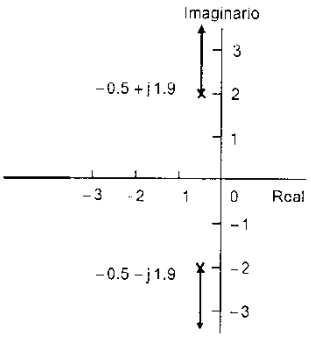


Figura A.8 Capítulo 9, problema 7



c)



d)

2. Vea la figura A.7.
3. *a*) 4 Hz, 0.5, *b*) 3.7 Hz, 0.8, *c*) 3.2 Hz, 0.32.
4. Raíces $= -1 \pm \sqrt{1 \quad K}$, por lo tanto, *a*) 4s, 0.9s *b*) 4s, 0.41s.
5. El original tiene lugares geométricos que cruzan el eje imaginario. La introducción del cero los mueve alejándolos del eje y de esta manera, se garantiza que no habrá valor de K que produzca inestabilidad. El ángulo de las asíntotas se cambia de $\pi/3$ a $\pi/2$.
6. *a*) 2.25, *b*) 20.5.
7. Vea la figura A.8, *a*) $K = 0.25$, *b*) $K = 0.7$.

Capítulo 10

1. *a*) 1.25, *b*) 0.
2. Cero −0.5, polo 0.
3. 0.1 a la derecha.
4. $K_p = 3, K_d = -0.6$.
5. Raíces 0, 0, 3 + j1; ceros $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.
6. 3, 0.0025 s^{-1}, 100 s.
7. 3, 0.01 s^{-1}, 25 s.
8. Vea el texto.
9. Vea el texto.
10. 27.
11. *a*) La intersección se mueve de −0.5 a −1; se mejora la estabilidad, *b*) La intersección se mueve de −0.5 a 0; se reduce la estabilidad.
12. Vea la figura A.9.

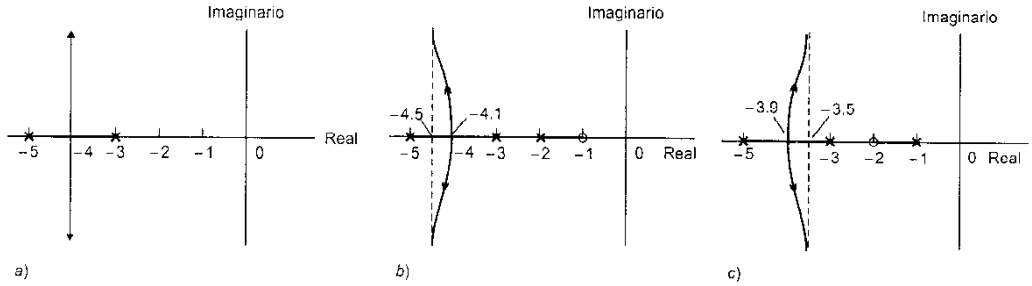


Figura A.9 Capítulo 10, problema 12

13. Vea el texto y las figuras 10.24-9.

Capítulo 11

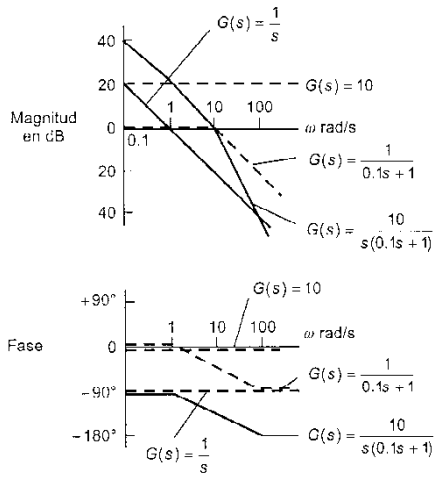
1. *a*) $5/\sqrt{\omega^2+4}$, $\omega/2$; *b*) $2/\sqrt{\omega^4+\omega^2}$, $1/\omega$; *c*) $1/\sqrt{4\omega^6-3\omega^4+3\omega^2+1}$, $\omega(3-2\omega^2)/(1-3\omega^2)$.
2. $\theta_o = 0.56\,\text{sen}\,(5t-38°)$.
3. $\theta_o = 1.18\,\text{sen}\,(2t+25°)$.
4. Para la magnitud multiplicar las respuestas al problema 1*a*) y *b*), es decir, $10/\sqrt{(\omega^2+4)(\omega^4+\omega^2)}$. Para la fase adicionar las respuestas 1*a*) y *b*), es decir, $(\omega/2)+(1/\omega)$.
5.

ω		0	1	2	∞
a)	$\lvert G(j\omega)\rvert$	∞	0.44	0.12	0
	ϕ	90°	450°	26.6°	0°
b)	$\lvert G(j\omega)\rvert$	1	0.32	0.16	0
	ϕ	0°	−71.6°	−80.5°	−90°

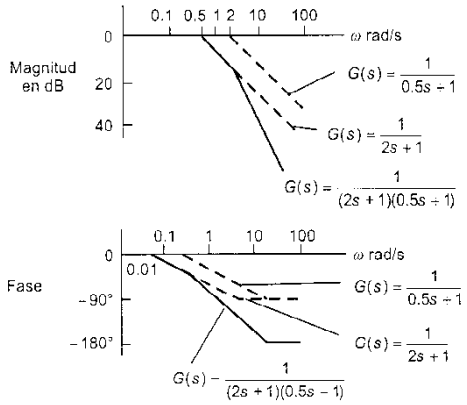
6. Vea la figura A.10.
7. *a*) $100/(s+1)(0.1s+1)$, *b*) $10/s(0.1s+1)$, *c*) $10s/(s+1)(s+0.001)$, *d*) $100/(s^2+s+1)$.
8. Vea la figura A.11.
9. *a*) Siempre inestable, *b*) $K+1<(\tau_1+\tau_2+\tau_3)(1/\tau_1+1/\tau_2+1/\tau_3)$, *c*) $K>0$.
10. *a*) 0.83, *b*) 0.66.
11. 51°.
12. 17 dB, 77°.

Capítulo 12

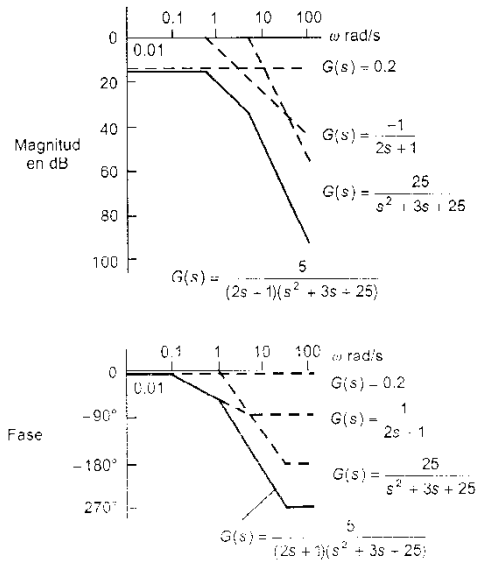
1. Por ejemplo, *a*) medidor de flujo como una placa de orificio, *b*) tacogenerador, *c*) potenciómetro.
2. Los potenciómetros sirven como detectores de errores.
3. Por ejemplo, LVDT, tren de engranes y tornillo.
4. 0.32, 1.8.
5. Cerebro como comparador, realimentación de posición mediante visión, tacogenerador para la realimentación de velocidad, motor de cd para el elemento de corrección.



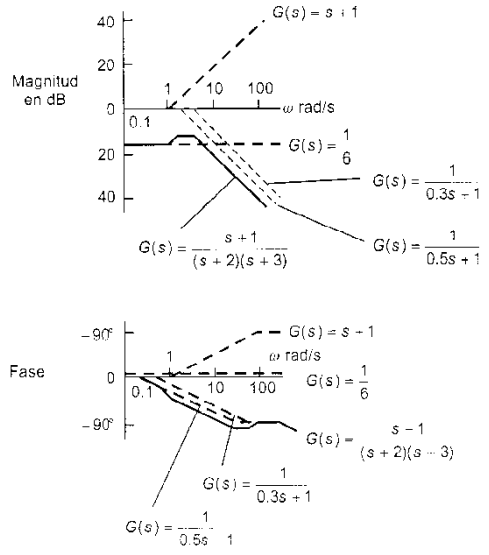
a)



b)



c)



d)

Figura A.10 Capítulo 11, problema 6

Capítulo 13

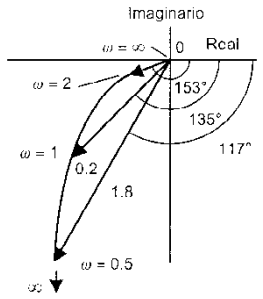


Figura A.11 Capítulo 11, problema 6

1. *a*) Inicio seguido del encendido de una bomba, cuando el tanque está lleno, el calentador se enciende; *b*) inicio seguido del encendido de la bomba 1 y la bomba 2, cuando ambos tanques están llenos, los calentadores se encienden.
2. *a*) Encender 1, entonces encender la bomba 1; encender 2, entonces encender la bomba 2, *b*) encender 1, bombas 1 y 2 encendidas, *c*) encender 1 y encender 2, encender bomba 1.
3. Encender la entrada 1 después de 10 s, la salida A se enciende; la entrada 2 se enciende después de 20 s, la salida B se enciende; la entrada 3 se enciende después de 30 s y la salida B se apaga.
4. La válvula 2 se activa mediante a–, la válvula 3 mediante b–, la válvula 5 mediante a+ y la válvula 7 mediante b+.
5. Grupo II al cilindro A controla la válvula directa, el cilindro B controla la válvula vía la válvula a–, Seleccione grupo I activada mediante b–.
6. *a*) Entrada 1 negada, entrada 2 negada, *b*) entrada 1 negada, entrada 2 negada, *c*) entrada 1 negada o entrada 2 negada.
7. *a*) Como en la figura 13.21, *b*) como en la figura 13.26, c) vea la figura A.12*a*). *d*), vea la figura A.12*b*), *e*) como en la figura 13.16*a*), *f*) como en la figura 13.33*c*).
8. Vea la figura A.13.

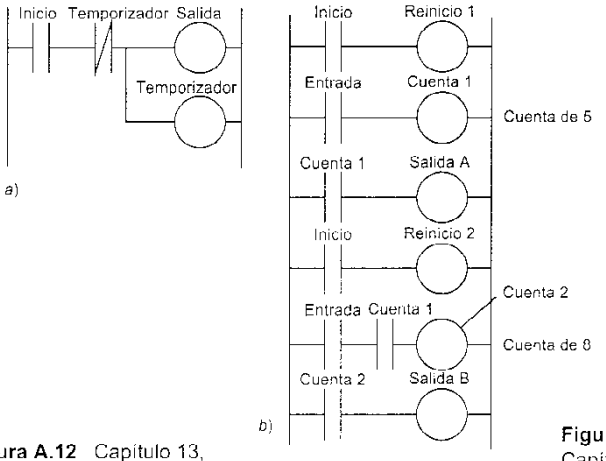


Figura A.12 Capítulo 13, problema 7

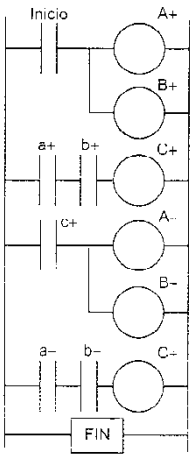


Figura A.13 Capítulo 13, problema 8

Capítulo 14

1. *a*) La computadora en el lazo de realimentación (figura 14.1), *b*) un lazo de realimentación provee un punto de ajuste para otro lazo (figura 14.2). *c*) la realimentación es de una cantidad a partir de la cual el controlador infiere el valor de la variable controlada, *d*) adapta en forma automática la estrategia de control para hacer frente a una situación (figura 14.4).

Capítulo 15

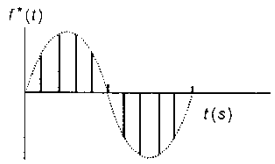


Figura A.14 Capítulo 15, problema 5

1. 0.5, 0.25, 0.125
2. 0.5, 0.75, 0.875, 0.9325, ...
3. $3\delta(t)+3\delta(t-1)+3\delta(t-2)$
4. *a*) 3, 2, 1, *b*) 2, 1, 0, −1
5. Vea la figura A.14
6. Vea el texto.
7. *a*) 1, *b*) $2z/z^2(z-1)$, *c*) $z/z^2(z-1)$, *d*) $Tz/(z-1)^2$
8. *a*) $f(1T)=1, f(2T)=-1, f(3T)=+1, f(4T)=-1, \ldots$
   b) $f(1T)=2, f(2T)=-1, f(3T)=-4, f(4T)=2, \ldots$
   c) $f(0)=2, f(1T)=-8, f(3T)=27, f(4T)=-92, \ldots$
9. *a*) 2^k-1, *b*) $\frac{1}{3}\{1-(-2)^k\}$, *c*) $\frac{1}{2}-2^k+(\frac{1}{3})^k$
10. $2/(z-3)$; 0, 2, 8, 26, ...
11. 1, 1, 1, 1, ...
12. $1/(z^2-5z+6)$
13. $1/(0.06+0.12z^{-1}+0.06z^{-2})$
14. *a*) $z/(z-e^{-T})$, *b*) $1-\{0.5z/(z-e^{-0.5T})\}$,
    c) $(1-e^{-T})z/(z-1)(z-e^{-T})$
15. $1, -0.1, -0.9, -0.08, -0.07, \ldots, \infty$
16. 0, 0.34, 0.85, 1,12, 1.15, ..., 1
17. 0, 0.37, 1.0, 1.4, 1.4, 1.1, ..., 1
18. $14z-4/(z^2+13.1z-4)$
19. Como se dio en el problema.
20. 0.8, 0.6
21. Estables *a*), *c*), *d*); críticamente estable *b*)
22. $K<1$
23. 0.2 s
24. *a*) Inestable, *b*) estable.
25. Estable.
26. $$|G(j\omega)| = \frac{0.1}{[(\cos\omega T-0.4)^2+\operatorname{sen}^2\omega T]^{1/2}}$$
    $$\tan\phi = -\frac{\operatorname{sen}\omega T}{\cos\omega T-0.4}$$

Índice

ADC, *vea* convertidor analógico a digital
Algoritmo 358
  implementación del 359
Amortiguador 37
Amortiguamiento crítico 93, 136
Amplificador, rechazo al ruido 29
Análisis
  de mallas, 45
  de nodos 45
Analogías
  eléctrica y fluídica 58
  eléctrica y mecánica 51
Ancho de banda 272
Aproximación de Tustin 340, 358
Arreglo de Routh 190
Aseguramiento 329
Automóvil
  modelo del movimiento de la rueda de un 41
  sistema de manejo de un 14, 16

Café, sistema de levantamiento de una tasa de 13
Capacitor
  circuito LCR 47, 90, 94
  modelo del 43
  sistema CR 2, 46, 80, 83, 115, 120, 126
Cascada
  compensador de adelanto de fase en 242, 276
  compensador de atraso de fase en 242, 275
  compensador en 242
  control en 314, 315, 330
  lazos en 330
Cero, definición de 183
Cilindro, *vea* Cilindro neumático
Clase de sistema 169
Codificador 292, 333
Coeficiente de descarga 295
Compensación, 225, 242, 275
Compuerta
  AND (Y) 321
  OR (O) 321
Computadora 329

Constante
  de error de aceleración 174
  de error de velocidad 173
Control
  de nivel de agua 11, 79
  de nivel de líquidos 11, 15, 79, 161, 169
  de velocidad de la flecha de un motor 12
  digital directo 329
  elementos de 6, 8
  estrategias de 15
  inferencial 330
  PID 234, 247, 320, 359
Control adaptable 331
  autosintonización 331
  ganancia preprogramada 331
  modelo de referencia 331
Controlador basado en amplificadores operacionales 243, 303
Controlador de tres términos 234
Controlador lógico programable 318
  actualización continua 320
  aseguramiento en el 322
  canales de entrada del 319
  contadores en el 325
  copiado masivo de entrada-salida 320
  direcciones en el 321
  entrada-salida en el 319
  programación del 321
  registros de corrimiento del 325
  relevadores internos del 323
  temporizadores del 324
Controlador neumático 247
Controladores 225
Convertidor analógico a digital 17, 332, 333, 335
Convertidor de código 333
Convertidor digital a analógico 17, 292, 332, 335, 341
Criterio de Routh-Hurwitz 190, 365

DAC, *vea* Convertidor digital a analógico
Decremento 100
Derivativo(a)
  constante de tiempo 233
  control 12, 232, 304, 358
  controlador 246
  ganancia 232
Detector de temperatura resistivo 294
Diagrama (Modelo) de bloques de un sistema 1
  con múltiples entradas 155
  manipulación del 145
  simplificación del 152
  tabla de transformaciones de 150
Diagrama
  de cuerpo libre 40
  de escalera 310, 321
  de funciones, *vea* Diagrama secuencial de funciones
  de tiempos del proceso 310, 312
  secuencial de funciones 312, 314
Digital
  control 17
  leyes 291
Dominio de la frecuencia 253
Dominio de s 106

Ecuación
  auxiliar 87, 92
  de Bernoulli 295
  diferencial 40, 78
    orden de una 79
  en diferencias 338
Elemento de comparación, 8
Elementos de corrección 6, 8, 297
Energía en los sistemas 38
Entrada parabólica 174
Error
  en estado estable 24, 139, 167
  sensor de 289
  señal de 9
Estabilidad 31, 182, 308, 361
  arreglo de Routh para 190, 367
  de sistemas de datos muestreados 361
  Jury, prueba de 362
  relativa 196, 217
  Routh-Hurwitz, criterio de 190, 312, 366
  y los polos 187
Estado estable
  error en 24, 139, 167

respuesta en 19, 78
Factor de amortiguamiento relativo 41, 91, 92, 94, 129, 203, 216
Flujo
diagrama de 311, 324
sensores de razón de 295
Fracciones parciales 118, 350
Frecuencia angular natural 41, 91, 129, 203, 216
Frecuencia de esquina (corte) 264
Fuelles 59, 88
Función de transferencia de la trayectoria directa 22, 30, 146
Función de transferencia
con lazo de realimentación 21, 146
de elementos en serie 20, 146
de la trayectoria directa 22
de un sistema en lazo abierto 20
definición de 19, 125
en lazo cerrado 22
pulso 352
Galga extensométrica (extensómetros) 291
Hidráulica
capacitancia 55
inercia (inertancia) 55
resistencia 54
sistema 54, 61, 126, 127
Inductor
circuito LCR 47, 90, 94
circuito LR 47, 116
modelo del 43
Integral
constante de tiempo 230
control 12, 227, 358
controlador 245
ganancia 227
Lavadora 6, 7, 309
Leyes de Kirchhoff 45
Leyes de Newton 37
Linealidad 70
Lista de instrucciones 310
Lugar geométrico de las raíces
análisis en el 200
construcción del 207
de sistemas de primer orden 200
de sistemas de segundo orden 202
de sistemas en lazo cerrado 204
interpretación del 215
ramas del 208
Margen
de fase 283
de ganancia 282
Masa 37
MATLAB 374
Medición
elemento de 9
sistema de 2, 21
Medidor de flujo de boquilla 296
Método de la ganancia límite 238
Microcontrolador 318, 332
Microprocesador 318, 335
Modelo
de montaje de una máquina 41
de un sistema 36
de un sistema dinámico 125
de un termómetro 65, 80, 117, 132, 133
definición de 3
linealizado 72
manipulación de diagramas de bloques 145
matemático 18
Modelos
linealizados 72
matemáticos 18
Modo de control de dos posiciones 12
Momento de inercia 38
Motor de inducción de jaula de ardilla 298
Motor de pasos 299
Neumático(a)
analogía con sistemas eléctricos 58
capacitancia 56
cilindro 72, 302, 313, 315, 316, 321, 323, 325, 326
controlador 247
inercia (inertancia) 57
resistencia 56
sistema 54
Números complejos 205, 206, 254
Operador D 85, 103
Optoacoplador, *vea* optoaislador
Optoaislador 320
Orden 128
de una ecuación diferencial 79
Orificio
flujo a través de un 71, 73
placa de 297
Patrón de polos y ceros 186, 258
Periodo de muestreo 336, 360
Perturbaciones, efecto de las 27, 178
Pico
de resonancia 272
tiempo 99
Plano w 365, 369
PLC, *vea* Controlador lógico programable
Polo(s)
definición de 183
en lazo abierto 201
y estabilidad 187
Posición
constante de error de 171
realimentación de 9, 239
sistema de control de 24, 160, 303
Potenciómetro 67, 288
Prealimentado 149, 321, 303
Presión manométrica 291
Principio de superposición 70, 176
Proceso(s)
curva de reacción del 237
diagrama de tiempos del 310, 312
elementos de 6, 9
Procesos discretos 309
manejado por eventos 309
manejado por tiempos 309
señales de tiempo en 309
Proporcional
banda 225
control 12, 225, 304, 356
controlador 244
ganancia 225
Prueba de Jury 366
Pulso
función de transferencia 317
modulación por ancho de 297, 332
Punto de desprendimiento (ruptura) 209
Punto de quiebre 264
Raíz, dominante 215
Realimentación de velocidad 239, 305
Realimentación negativa 9
Realimentación
de posición 239
de velocidad 239, 305
lazo de 9, 338
negativa 9
positiva 9
Refrigerador 16
Relevador 300, 326
Resistor
circuito RC 2, 46, 80, 83, 115, 120, 126
circuito RL 47, 116
circuito RLC 47, 90, 94
modelo del 44
Resorte
lineal 37
linealidad del 70
torsional 38
Respuesta en frecuencia 253
a partir del patrón de polos y ceros 258
de elementos en serie 260
de sistemas de datos muestreados 335, 368
de sistemas de primer orden 256
de sistemas de segundo orden 257
función de la 253
Respuesta
forzada 82, 91
libre, *vea* Respuesta transitoria
transitoria 78, 81, 91
Retén de orden cero 341, 354
Rigidez 37
Rotacional

amortiguador 38
transformador diferencial de variación 161

Secuencia 336
Señal escalón 80, 82, 85, 115, 116, 130, 134
error con 170, 226, 228, 231, 233, 235
muestreada 337
transformada de Laplace de la 108
Señal impulso 81, 133, 301, 352, 355
Señal rampa 80, 87, 120, 131
error con la 172, 226, 228, 231, 233, 235
muestreada 337
Señal senoidal 81, 87, 112, 346
SIMULINK 382
Síncro 293
Sistema
de calefacción 2, 4, 6, 7, 9, 15, 27, 66
de datos muestreados 17, 335, 354
de estación de potencia 1
de medición de temperatura 3, 65, 72, 80, 117, 132, 133, 294
de parámetros concentrados 36
de primer orden 79, 86, 128, 130, 200, 256, 277, 357
de segundo orden 89, 129, 134, 202, 257, 278
eléctrico 43, 51, 58, 83, 126
electromecánico 66
fluídico 54
hidromecánico 72
mecánico rotacional 39
Sistema mecánico
analogía con un sistema eléctrico 51
lineal 36, 89, 126
rotacional 38, 96, 102
Sistema motor 1, 4, 7, 12, 18, 23, 25, 43, 67, 85, 126, 158, 303, 332
con modulación por ancho de pulso 297, 332
control de posición de un 160
controlado por armadura 68, 126, 158
controlado por campo 69, 158
controlado por microprocesador 322
de cd 67, 158, 297
de corriente alterna 298
motor de inducción de jaula de ardilla 298
motor de pasos 299
sin escobillas 298
Sistema(s)
clase de 169
clasificación de 169
de control adaptable 331
de control digital directo 329
de control, definición 3
de datos muestreados 17, 325, 354
de parámetros concentrados 36
de primer orden, *vea* Sistema de primer orden
de segundo orden, *vea* Sistema de segundo orden
definición 1
dinámico 125
eléctrico, *vea* Sistema eléctrico
electromecánico, *vea* Sistema electromecánico
fluídico 54
hidromecánico, *vea* Sistema hidromecánico
mecánico, *vea* Sistema mecánico
respuesta de 78
térmico, *vea* Sistema térmico
tipo de 169
Sistema(s) de control
adaptable, *vea* Control adaptable
de datos muestreados, *vea* Sistema de datos muestreados
definición de, 3
digital directo 329
digital, *vea* Control digital
en lazo abierto, *vea* Sistema de control en lazo abierto
en lazo cerrado, *vea* Sistema de control en lazo cerrado
estabilidad, *vea* Estabilidad
inferencial 330
prealimentado, *vea* Prealimentado
respuesta de 78
sensibilidad a cambios en los componentes 30
sensibilidad a perturbaciones 27
Sistema(s) de control en lazo abierto 4
elementos de 6
error en 167
estabilidad de 32
función de transferencia de 20, 146, 169
Sistema(s) de control en lazo cerrado 4
de datos muestreados 335, 354
ejemplos de 11
elementos de 8
error en 167
estabilidad de 32
función de transferencia de 21, 23, 147, 148
lugares geométricos de las raíces de 204
Sobreamortiguado 92, 134
Sobrepaso 99
Subamortiguado 93, 136

Tacómetro 291, 306, 333
Teorema
del valor final 122
del valor inicial 121
Térmico(a)
capacitancia 64
resistencia 63
sistema 63, 80, 117, 132, 133
Termistor 72
Tiempo
constante de 75, 83, 88
de asentamiento 100
de decaimiento 100
de levantamiento 99
dominio del 106
Tipo de sistema 169
Tostador 5, 10
Transformación bilineal 369
Transformada de Laplace 106
de derivadas 110
de ecuaciones diferenciales 115
de un escalón 108
de un escalón retrasado 112
de un impulso 111, 133
de un impulso retrasado 112
de un sistema de primer orden 130
de un sistema de segundo orden 134
de una rampa 112
de una rampa retrasada 112
de una senoide 112
inversa 114
reglas de la 109
tabla de 111
teorema del valor final 121
teorema del valor inicial 121
Transformada z 342
de un escalón muestreado 343
de una rampa muestreada 343
de una señal en tiempo discreto 344
inversa 349
operador de corrimiento en el tiempo 348
propiedades de la 345
tabla de 346
teorema del valor final 349
teorema del valor inicial 349
teoremas de corrimiento 347
translación compleja 348
Transformador diferencial de variación lineal 289
Traza de Nyquist 276
criterio de estabilidad a partir de la 281
de un sistema de primer orden 278
de un sistema de segundo orden 278
Trazas de Bode 261
Tubo
de Dall 297
en U 62
Venturi 296

Válvula
actuador de la 300
de carretes 72
símbolo 301
solenoide 300

Ziegler y Nichols 237

Ingeniería de Control

El libro **Ingeniería de control** proporciona una introducción básica, pero completa al tema de la ingeniería de control para estudiantes de ingenierías mecánica y eléctrica. Está escrito en forma sencilla y contiene muchos ejemplos que refuerzan la comprensión de la teoría.

Esta segunda edición ha sido revisada sustancialmente con el fin de que sea útil para ambas ramas de la ingeniería, como una introducción básica sin profundizar innecesariamente, para evitar que se requieran demasiados antecedentes para su comprensión.

Características clave:

- Es una introducción exhaustiva que inicia desde un nivel elemental.
- Incluye tres nuevos capítulos sobre equipos básicos de un sistema de control, sistemas de tiempo discreto y control basado en microprocesadores.
- El capítulo de la transformada *z* se reescribió totalmente.
- Contiene muchos estudios de casos.
- La sección acerca de control digital es más adecuada.
- Se mejoró el índice.

Aborda los temas: sistemas de control y modelos de sistemas; respuestas de sistemas; transformadas de Laplace; modelos de sistemas dinámicos; modelos de diagramas de bloque; error en estado estable; polos, ceros y estabilidad; controladores; respuesta de frecuencia; equipos básicos de sistemas de control; control de procesos discretos; control basado en microprocesadores; transformada *z*.

El autor:

Bill Bolton primero fue consultor en la Unidad de Estudios Superiores y luego jefe de investigación, desarrollo y supervisión del Consejo de Educación Tecnológica y de Negocios en Inglaterra. Es autor de varios libros de texto de ingeniería que incluyen: *Mecatrónica, Sistemas de Control Electrónico en Ingeniería Mecánica y Eléctrica, 2a. edición* (traducido al español por Alfaomega), *Laplace and z-transforms* y *Fourier Series*, entre otros.

ISBN 970-15-0636-7

Alfaomega Grupo Editor